Q-理论

沙苗尔·阿德里安·安茨编写的脚本，
发布并免费提供于:

https://www.samueladrianantz.com/zh/scripts/qlilun.pdf

https://gitlab.com/samueladrianantz/public/tree/main/qlilun.pdf

2023 年 10 月 28 日

关于Q-理论

量子理论(quantum theory)导致分析中导数出现问题，适应导致Q-理论(Q theory)。在量子理论中，变量不是连续的，而是量化的。因为导数只为连续变量定义，所以必须省略量化变量的函数极限。

目录

第一章 H-导数

引理 1 (H-导数的线性度). *XXXX*

证明. XXXX □

引理 2 (H-导数的产品法则). *两个函数*$u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*的乘积的*$H$*-导数是:*

$$D_h(u \cdot v)(x) = ?. \tag{1.1}$$

证明. XXXX □

引理 3 (H-导数的商法则). *两个函数*$u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*的商数的*$H$*-导数是:*

$$D_h \frac{u}{v}(x) = ?. \tag{1.2}$$

证明. XXXX □

引理 4 (H-导数的链式法则). *XXXX*

证明. XXXX □

第二章　Q-导数

引理 5 (Q-导数的线性度). *XXXX*

证明. XXXX □

引理 6 (Q-导数的乘积法则). 两个函数$u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$的乘积的$Q$-导数是:

$$D_q(u \cdot v)(x) = ?. \tag{2.1}$$

证明. XXXX □

引理 7 (Q-导数的商数法则). 两个函数$u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$的商数的$Q$-导数是:

$$D_q \frac{u}{v}(x) = ?. \tag{2.2}$$

证明. XXXX □

引理 8 (Q-导数的链式法则). *XXXX*

证明. XXXX □

定义 1 (Q-阶乘).

$$[n]_q! := \prod_{k=1}^{n} [k]_q \tag{2.3}$$

定义 2 (Q-二项式系数).

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} \tag{2.4}$$

第三章　Q-指数函数

指数函数可以说是所有分析中最重要的函数，因为它是自己的导数。在Q理论中可以使用Q-导数研究相同的性质。

3.1　第一个Q-指数函数

定义 3 (第一个Q-指数函数)**.** *这个函数:*

$$\exp_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} \tag{3.1}$$

是第一个Q-指数函数.

$$\lim_{q\to 1} \exp_q(z) = \lim_{q\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{q\to 1} \left(\frac{z^n}{[n]_q!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z). \tag{3.2}$$

定理 1. *第一个Q-指数函数的Q-导数是:*

$$D_q \exp_q(z) = \exp_q(z). \tag{3.3}$$

证明. 使用根据引理(**??**)的Q-导数的线性度和方程(XXXX):

$$D_q \exp_q(z) = D_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_q z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{[n-1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} = \exp_q(z). \tag{3.4}$$

□

3.2　第二个Q-指数函数

定义 4 (第二个Q-指数函数)**.** *这个函数:*

$$\exp_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{z^n}{[n]_q!} \tag{3.5}$$

是第二个q-指数函数.

$$\lim_{q\to 1}\exp_q(z) = \lim_{q\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{q\to 1}\left(q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{z^n}{[n]_q!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z). \tag{3.6}$$

定理 2. *第二个Q-指数函数的Q-导数是:*

$$D_q \operatorname{Exp}_q(z) = \operatorname{Exp}_q(qz). \tag{3.7}$$

证明. 使用根据引理(**??**)的Q-导数的线性度和方程(XXXX):

$$\begin{aligned} D_q \operatorname{Exp}_q(z) &= D_q\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{D_q z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{z^{n-1}}{[n-1]_q!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\frac{(qz)^{n-1}}{[n-1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(qz)^n}{[n]_q!} = \operatorname{Exp}_q(qz). \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

3.3 广义Q-指数函数

$$\begin{aligned} D_q \exp_q^{(i,j)}(z) &= D_q\sum_{n=0}^{\infty} q^{f(i,j,n)}\frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{f(i,j,n)}\frac{D_q z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{f(i,j,n)}\frac{z^{n-1}}{[n-1]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{f(i,j,n+1)}\frac{z^n}{[n]_q!} = q^i\sum_{n=0}^{\infty} q^{f(i,j,n+1)-jn-i}\frac{(q^j z)^n}{[n]_q!} \\ &\overset{!}{=} q^i\sum_{n=0}^{\infty} q^{f(i,j,n)}\frac{(q^j z)^n}{[n]_q!} = q^i\exp_q^{(i,j)}(q^j z) \end{aligned} \tag{3.9}$$

第四章 Q-三角函数

4.1 基础第一个Q-三角函数

使用两种Q-指数函数, 有可能定义两种Q-三角函数。

定义 5 (第一个Q-正弦函数和第一个Q-余弦函数). 这双个三角函数:

$$\sin_q(z) := \frac{1}{2}\left(\exp_q(iz) + \exp_q(-iz)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \tag{4.1}$$

$$\cos_q(z) := \frac{1}{2i}\left(\exp_q(iz) - \exp_q(-iz)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!} \tag{4.2}$$

是第一个Q-正弦函数和第一个Q-余弦函数。

引理 9. 第一个Q-正弦函数$\sin_q$和第一个Q-余弦函数$\cos_q$的导数是:

$$D_q \sin_q(z) = \cos_q(z); \tag{4.3}$$

$$D_q \cos_q(z) = -\sin_q(z). \tag{4.4}$$

证明. 使用根据引理(??)的Q-导数的线性度，引理(??)的第一个Q-指数函数的导数和引理(??)的Q-链式法测，第一个Q-正弦函数$\sin_q$和第一个Q-余弦函数$\cos_q$的导数是:

$$D_q \sin_q(x) = \frac{1}{2}(D_q(\exp_q(iz)) + D_q(\exp_q(-iz))) \tag{4.5}$$

$$D_q \cos_q(x) = \frac{1}{2i}(D_q(\exp_q(iz)) - D_q(\exp_q(-iz))) \tag{4.6}$$

□

证明. 使用根据引理(??)的Q-导数的线性度，第一个Q-正弦函数$\sin_q$和第一个Q-余弦函数$\cos_q$的导数是:

$$\begin{aligned} D_q \sin_q(z) &= D_q \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{D_q z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!} = \cos_q(z); \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}D_q\cos_q(z) &= D_q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{[2n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{D_q z^{2n}}{[2n]_q!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{[2n-1]_q!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = -\sin_q(z).\end{aligned} \tag{4.8}$$

□

4.2 基础第二个Q-三角函数

定义 6 (第二个Q-正弦函数和第二个Q-余弦函数). 这双个三角函数:

$$\mathrm{Sin}_q(z) := \frac{1}{2}(\mathrm{Exp}_q(iz) + \mathrm{Exp}_q(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)n}\frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \tag{4.9}$$

$$\mathrm{Cos}_q(z) := \frac{1}{2i}(\mathrm{Exp}_q(iz) - \mathrm{Exp}_q(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n-1)n}\frac{z^{2n}}{[2n]_q!} \tag{4.10}$$

是第二个Q-正弦函数和第二个Q-余弦函数。

引理 10. 第二个Q-正弦函数Sin_q和第二个Q-余弦函数Cos_q的导数是:

$$D_q\,\mathrm{Sin}_q(z) = \mathrm{Cos}_q(qz); \tag{4.11}$$

$$D_q\,\mathrm{Cos}_q(z) = -\,\mathrm{Sin}_q(qz). \tag{4.12}$$

证明. 使用根据引理(??)的Q-导数的线性度，引理(??)的第二个Q-指数函数的导数和引理(??)的Q-链式法测，第二个Q-正弦函数Sin_q和第二个Q-余弦函数Cos_q的导数是:

$$D_q\,\mathrm{Sin}_q(x) = \frac{1}{2}(D_q(\mathrm{Exp}_q(iz)) + D_q(\mathrm{Exp}_q(-iz))) \tag{4.13}$$

$$D_q\,\mathrm{Cos}_q(x) = \frac{1}{2i}(D_q(\mathrm{Exp}_q(iz)) - D_q(\mathrm{Exp}_q(-iz))) \tag{4.14}$$

□

证明. 使用根据引理(??)的Q-导数的线性度，第二个Q-正弦函数Sin_q和第二个Q-余弦函数Cos_q的导数是:

$$\begin{aligned}D_q\,\mathrm{Sin}_q(z) &= D_q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)n}\frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)n}\frac{D_q z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)n}\frac{z^{2n}}{[2n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n-1)n}\frac{(qz)^{2n}}{[2n]_q!} = \mathrm{Cos}_q(qz);\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}D_q \operatorname{Cos}_q(z) &= D_q \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n-1)n}\frac{z^{2n}}{[2n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n-1)n}\frac{D_q z^{2n}}{[2n]_q!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(2n-1)n}\frac{z^{2n-1}}{[2n-1]_q!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)(n+1)}\frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(2n+1)m}\frac{(qz)^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = -\operatorname{Sin}_q(qz). \end{aligned} \tag{4.16}$$

□

4.3 第一个和第二个Q-圆周率

使用两种Q-余弦函数，有可能定义两种Q-圆周率。就像在（经典）分析中三角函数一样，Q-理论中Q-三角函数也是周期性的和周期由Q-圆周率类似地给出。

定义 7 (Q-圆周率). 这双值：

$$\pi_q := 2\min\{x \in \mathbb{R}^+ |\, \cos_q(x) = 0\} \tag{4.17}$$

$$\Pi_q := 2\min\{x \in \mathbb{R}^+ |\, \operatorname{Cos}_q(x) = 0\} \tag{4.18}$$

是第一个q-圆周率和第二个q-圆周率。

$$\tau_q := 2\pi_q \tag{4.19}$$

$$T_q := 2\Pi_q \tag{4.20}$$

引理 11 (基础第一个Q-三角函数的消失集合). 第一个Q-正弦函数和第一个Q-余弦函数的消失集合是：

$$V(\sin_q) = \{????\} \tag{4.21}$$

$$V(\cos_q) = \{????\} \tag{4.22}$$

证明. XXXX □

引理 12 (基础第二个Q-三角函数的消失集合). 第二个Q-正弦函数和第二个Q-余弦函数的消失集合是：

$$V(\operatorname{Sin}_q) = \{????\} \tag{4.23}$$

$$V(\operatorname{Cos}_q) = \{????\} \tag{4.24}$$

证明. XXXX □

4.4 进阶第一个Q-三角函数

定义 8 (进阶第一个Q-三角函数). 这四个三角函数:

$$\tan_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\cos_q)\to\mathbb{C}, \tan_q(z) := \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)} \tag{4.25}$$

$$\csc_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\sin_q)\to\mathbb{C}, \csc_q(z) := \frac{1}{\sin_q(z)} \tag{4.26}$$

$$\sec_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\cos_q)\to\mathbb{C}, \sec_q(z) := \frac{1}{\cos_q(z)} \tag{4.27}$$

$$\cot_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\sin_q)\to\mathbb{C}, \cot_q(z) := \frac{1}{\tan_q(z)} \tag{4.28}$$

是第一个Q-正切函数，第一个Q-余割函数，第一个Q-正割函数和第一个Q-余切函数。

推论 1 (进阶第一个Q-三角函数的消失集合). 使用引理*(??)*，第一个Q-正切函数，第一个Q-余割函数，第一个Q-正割函数和第一个Q-余切函数的消失集合是:

$$V(\tan_q) = V(\sin_q)\setminus V(\cos_q) \tag{4.29}$$

$$V(\csc_q) = V(\sec_q) = \emptyset \tag{4.30}$$

$$V(\cot_q) = V(\cos_q)\setminus V(\sin_q) \tag{4.31}$$

4.5 进阶第二个Q-三角函数

定义 9 (进阶第二个Q-三角函数). 这四个三角函数:

$$\mathrm{Tan}_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\mathrm{Cos}_q)\to\mathbb{C}, \mathrm{Tan}_q(z) := \frac{\mathrm{Sin}_q(z)}{\mathrm{Cos}_q(z)} \tag{4.32}$$

$$\mathrm{Csc}_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\mathrm{Sin}_q)\to\mathbb{C}, \mathrm{Csc}_q(z) := \frac{1}{\mathrm{Sin}_q(z)} \tag{4.33}$$

$$\mathrm{Sec}_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\mathrm{Cos}_q)\to\mathbb{C}, \mathrm{Sec}_q(z) := \frac{1}{\mathrm{Cos}_q(z)} \tag{4.34}$$

$$\mathrm{Cot}_q\colon \mathbb{C}\setminus V(\mathrm{Sin}_q)\to\mathbb{C}, \mathrm{Cot}_q(z) := \frac{1}{\mathrm{Tan}_q(z)} \tag{4.35}$$

是第二个Q-正切函数，第二个Q-余割函数，第二个Q-正割函数和第二个Q-余切函数。

推论 2 (进阶第二个Q-三角函数的消失集合). 使用引理*(??)*，第二个Q-正切函数，第二个Q-余割函数，第二个Q-正割函数和第二个Q-余切函数的消失集合是:

$$V(\mathrm{Tan}_q) = V(\mathrm{Sin}_q)\setminus V(\mathrm{Cos}_q) \tag{4.36}$$

$$V(\mathrm{Csc}_q) = V(\mathrm{Sec}_q) = \emptyset \tag{4.37}$$

$$V(\mathrm{Cot}_q) = V(\mathrm{Cos}_q)\setminus V(\mathrm{Sin}_q) \tag{4.38}$$

4.6 广义Q-三角函数和广义Q-圆周率

使用广义Q-指数函数，有可能定义广义Q-三角函数。

定义 10 (广义Q-三角函数). *这双三角函数:*

$$\sin_q^{(r,s)}(z) := \frac{1}{2}\left(\exp_q^{(r,s)}(iz) + \exp_q^{(r,s)}(-iz)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n??\frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \tag{4.39}$$

$$\cos_q^{(r,s)}(z) := \frac{1}{2i}\left(\exp_q^{(r,s)}(iz) - \exp_q^{(r,s)}(-iz)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n??\frac{z^{2n}}{[2n]_q!} \tag{4.40}$$

是广义Q-正弦函数和广义Q-余弦函数。

引理 13. *广义Q-正弦函数*$\sin_q^{(r,s)}$*和广义Q-余弦函数*$\cos_q^{(r,s)}$*的导数是:*

$$D_q \sin_q^{(r,s)}(z) = q^r \cos_q^{(r,s)}(q^s z); \tag{4.41}$$

$$D_q \cos_q^{(r,s)}(z) = -q^r \sin_q^{(r,s)}(q^s z). \tag{4.42}$$

证明. 使用根据引理(**??**)的Q-导数的线性度，引理(XXXX)的广义Q-指数函数的导数和引理(**??**)的Q-链式法测，广义Q-正弦函数$\sin_q^{(r,s)}$和广义Q-余弦函数$\cos_q^{(r,s)}$的导数是：

$$D_q \sin_q^{(r,s)}(z) := \frac{1}{2}\left(D_q(\exp_q^{(r,s)}(iz)) + D_q(\exp_q^{(r,s)}(-iz))\right) = X \tag{4.43}$$

$$D_q \cos_q^{(r,s)}(z) := \frac{1}{2i}\left(D_q(\exp_q^{(r,s)}(iz)) - D_q(\exp_q^{(r,s)}(-iz))\right) = X \tag{4.44}$$

□

证明. 使用根据引理(**??**)的Q-导数的线性度，第二个Q-正弦函数$\sin_q^{(r,s)}$和第二个Q-余弦函数$\cos_q^{(r,s)}$的导数是： XXXX □

定义 11 (广义Q-圆周率). *这个值:*

$$\pi_q^{(r,s)} := 2\min\left\{x \in \mathbb{R}^+ |\cos_q^{(r,s)}(x) = 0\right\} \tag{4.45}$$

是广义q-圆周率。