Geometrie der Raumzeit

Skript geschrieben von Samuel Adrian Antz,
veröffentlicht und frei verfügbar auf:
samueladrianantz.net/de/skripte/allreltheo

27. September 2023

Über die Allgemeine Relativitätstheorie

Die Newtonsche Gravitationstheorie von Isaac Newton aus dem Jahr 1678 und die Spezielle Relativitätstheorie von Albert Einstein aus dem Jahr 1905 sind inkompatibel. Gemäß letzterer sind Energie und Masse äquivalent, womit auch die Bewegungs- und Rotationsenergie der Materie oder die Feldenergie des elektromagnetischen Feldes zur Gravitation beitragen muss, was in ersterer nicht berücksichtigt wird.

Zudem sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld und die Newton–Possion-Gleichung zur Beschreibung von diesem zwar galilei-, aber nicht lorentzinvariant:

$$\begin{aligned} \ddot{x'}^i &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(\Lambda^i_j x^j) = \Lambda^i_j \ddot{x}^j = \Lambda^i_j \eta^{jk} \partial_k \Phi = \Lambda^i_j \eta^{jl} \Lambda^m_l \overline{\Lambda}^k_m \partial_k \Phi = \overline{\Lambda}^k_m \eta^{im} \partial_k \Phi \\ &\neq \Lambda^k_m \eta^{im} \partial_k \Phi = \eta^{im} \partial'_m \Phi \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \eta^{ij} \partial'_i \partial'_j \Phi = \eta^{ij} \Lambda^k_i \Lambda^l_j \partial_k \partial_l \Phi = \eta^{kl} \partial_k \partial_l \Phi = 4\pi G \rho \\ \neq 4\pi G \rho' \end{aligned} \tag{2}$$

Die Newtonsche Gravitationstheorie muss daher angepasst und damit verallgemeinert werden. Da die Maxwell-Gleichungen lorentzinvariant sind ist dasselbe nicht für die Elektrodynamik notwendig.

Eine solche Verallgemeinerung erfordert nun die Ersetzung der Dichte und des Gravitationspotentials durch den *Energie-Impuls-Tensor* und den *metrischen Tensor*, tensorielle Größen die mehr Informationen, wie unter anderem die kinetischen Beiträge der Materie enthalten. Zudem muss eine neue Bewegungsgleichung, die *Geodätengleichung*, und neue zur Kopplung von Gravitation an Materie, die *Einsteinschen Feldgleichungen*, konstruiert werden. Diese müssen lorentzinvariant sein und zudem im nichtrelativistischen Grenzfall die Newtonsche Grevitationstheorie ergeben.

Da die Newtonsche Theorie mathematisch bereits dem elektrischen Feld ähnelt ist auch von *elektromagnetischen Effekten der Gravitation* oder vom *Gravitoelektromagnetismus* die Rede, denn die Verwandschaft zwischen Elektromagnetismus und Gravitation ist sehr eng.

Ähnlich den elektromagnetischen Wellen kommt es durch die Bewegung der Materie nun auch zu *Gravitationswellen*. Im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen, die keine elektrische Ladung tragen, tragen Gravitationswellen jedoch Energie und sind daher unter anderem ihre eigene Quelle. Die *Einsteinschen Feldgleichungen* oder *Gravitationsgleichungen* der Allgemeinen Relativitätstheorie sind als Konsequenz anders als die Newton-Possion-Gleichung oder die Maxwell-Gleichungen nicht linear, was eine analytische Lösung sehr schwierig macht. Oft werden daher Näherungen wie etwa eine Linearisierung der Feldgleichungen für schwache Felder und kleine Geschwindigkeiten gemacht und die Korrekturen zur Newtonschen Theorie betrachtet. Für die mathematische Formulierung seiner neuen Theorie dachte Albert Einstein nun die von ihm gezeigte Relativität von Raum und Zeit weiter und beschrieb die Gravitation als den geometrischen Effekt der durch Materie und Energie gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit.

Eine Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie zu einer vereinheitlichenden Theorie der *Quantengravitation* erfordert die Existenz von Feldquanten, den sogenannten *Gravitonen*, welche die Gravitation übertragen. Die Formulierung einer solchen Theorie ist bisher noch nicht gelungen.

Inhaltsverzeichnis

I Geometrie der Raumzeit **8**

1 Äquivalenzprinzip **9**
1.1 Riemann-Tensoren 9
1.2 Wegelement und metrischer Tensor 11
1.3 Tensordichten 12

2 Die Geodätengleichung **14**
2.1 Herleitung der Geodätengleichung aus dem Äquivalenzprinzip 14
2.2 Herleitung der Geodätengleichung aus dem Variationsprinzip 15
2.3 Christoffelsymbole 16

3 Newtonscher Grenzfall der Geodätengleichung **18**

4 Kovariante und Lie-Differentiation **19**
4.1 Kovariante Differentiation 19
4.2 Lie-Differentiation 21

5 Krümmungstensoren **23**
5.1 Riemann–Christoffel-Krümmungstensor 23
5.2 Kovarianter Krümmungstensor 25
5.3 Ricci-Tensor und -Skalar 26
5.4 Einstein-Tensor 26
5.5 Krümmungstensor in zwei Dimensionen 27
5.6 Krümmungstensor in drei Dimensionen 27

6 Raumzeitsymmetrien **28**
6.1 Killing-Felder 28
6.2 Homothetische und konforme Felder 29
6.3 Affine Felder 29
6.4 Krümmungs-Kollineation (CC-Feld) 30

II Gesetze mit Gravitation **31**

7 Kovarianzprinzip **32**

8 Allgemein relativistische Hydrodynamik **33**

9 Allgemein relativistische Elektrodynamik **34**

10 Spinpräzession **35**
10.1 Geodätische Präzession 35
10.2 Thomas-Präzession 35
10.3 Fermi-Transport 36

III Quellen der Gravitation 37

11 Energie-Impuls-Tensor **38**
11.1 Materie-Kollineation (MC-Feld) 38

12 Pseudotensoren **39**
12.1 Landau–Lifschitz-Pseudotensor 39
12.2 Einstein-Pseudotensor 39

IV Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen 40

13 Newtonscher Grenzfall der Feldgleichung **41**
13.1 Vakuumfeldgleichungen 43
13.2 Einstein–Maxwell-Gleichungen 43
13.3 Lambdavakuumfeldgleichungen 43

14 Elektromagnetischer Feldstärketensor **44**

15 Einstein–Hilbert-Wirkung **45**

V Singuläre exakte Lösungen 46

16 Lösungsansätze **47**
16.1 Standardform und isotrope Form 47

17 Koordinatentransformationen **49**
17.1 Schwarzschild-Koordinaten 49
17.2 Lemaître-Koordinaten 49
17.3 Kerr–Schild-Koordinaten 49
17.4 Kruskal–Szekeres-Koordinaten 49

18 Schwarzschild-Metrik **50**
18.1 Äußere Lösung 50
18.2 Ereignishorizont 50
18.3 Birkhoff-Theorem 51
18.4 Innere Lösung 51

19 Reissner–Nordstrøm-Metrik **53**
19.1 Äußere Lösung 53
19.2 Ladungsinduzierte Antigravitation 53
19.3 Cauchy-Horizonte und -Flächen 53

19.4 Innere Lösung 54

20 Spezielle Koordinatensysteme **55**
20.1 Eddington–Finkelstein-Koordinaten 55
20.2 Gullstrand–Painlevé-Koordinaten 55
20.3 Boyer–Linquist-Koordinaten 55

21 Kerr-Metrik **56**
21.1 Ereignishorizonte und Ergosphäre 56

22 Kerr–Newman-Metrik **57**
22.1 Ereignishorizonte und Ergosphäre 57

23 Penrose-Prozess **58**

24 deSitter- und Anti-deSitter-Metriken **59**
24.1 der Schwarzschild-Metrik 59
24.2 der Reissner–Nordstrøm-Metrik 59
24.3 der Kerr-Metrik 59
24.4 der Kerr–Newman-Metrik 59

25 Abbassi–Gharanfoli-Metrik **60**

26 Schwarzschild–Tangherlini-Metrik **61**

27 Vaidya-Metrik **62**

28 Vaidya–Bonner-Metrik **63**

29 Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik (FLRW-Metrik) **64**
29.1 Friedmann-Gleichungen 64

30 Spin-Flip bei Schwarzen Löchern **66**

31 ADM-Formalismus **67**

32 Alcubierre-Metrik **68**

VI Kosmologische exakte Lösungen 69

33 Gödel-Metrik **70**

34 Lemaître–Toleman–Bondi-Metrik **71**

35 Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik (FLRW-Metrik) **72**

36 McVittie-Metrik **73**

VII Exotische exakte Lösungen 74

37 Einstein–Rosen-Metrik 75
37.1 Schwarzschild-Wurmloch . . . 75
37.2 Reissner–Nordstrøm-Wurmloch . . . 75

38 Geschlossene Zeitschleifen 77

VIII Kosmologische Modelle 78

39 Sterne 79
39.1 Weiße Zwerge . . . 79
39.2 Neutronenstern . . . 79
39.3 Quarksterne . . . 79

40 Singularitätentheoreme 80

IX Tetrad-Formalismus 81

41 Tetrade 82

42 Spinverbindung 83

X Weiterführende Differentialgeometrie 86

43 Weiterführende Tensoren 87
43.1 Plebanski-Tensor . . . 87
43.2 Kulkarni–Nomizu-Produkt und Weyl-Tensor . . . 87

44 Weyl-Transformation 88

XI Alternative Gravitationstheorien 92

45 f(R)-Gravitation 93
45.1 R^2-Gravitation . . . 93
45.2 Starobinsky-Gravitation . . . 93

XII Gravitationsstrahlung 94

46 Linearisierte Feldgleichungen 95

47 Störung des Gravitationsfeldes 96
47.1 Störung des Christoffelsymbols . . . 96
47.2 Störung des Riemann–Christoffel-Krümmungstensors . . . 97
47.3 Störung des Einstein-Tensors . . . 97

48 Gravitationsstrahlung in einer nichtflachen Raumzeit **98**

Teil I

Geometrie der Raumzeit

Kapitel 1

Äquivalenzprinzip

Der Verallgemeinerung von einer flachen auf eine gekrümmte Raumzeit liegt das *Äquivalenzprinzip* zugrunde. Gemäß diesem kann nicht zwischen einem homogenen Gravitationsfeld und einer Beschleunigung unterschieden werden, weshalb die Gravitation als Trägkeitskraft interpretiert werden kann. In einem freifallenden Koordinatensystem ξ^α hat die Raumzeit daher lokal eine annähernd flache Struktur.
Durch Transformation des freifallenden Koordinatensystems ξ^α auf ein nicht unbedingt freifallendes Koordinatensystem x^μ ergeben sich die entsprechenden gravitativen Beiträge in diesem und Größen aus der speziellen Relativitätstheorie, wie Lorentz-Tensoren, das Wegelement und der Minkowski-Tensor können verallgemeinert werden.

1.1 Riemann-Tensoren

Definition 1.1 (Riemann-Tensor)**.** *Für einen Lorentz-Tensor (meist Indizes α, β, γ, δ) wird:*

$$T^{\kappa_1\dots\kappa_n}_{\lambda_1\dots\lambda_k} := \frac{\partial x^{\kappa_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\kappa_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}} \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \xi^{\beta_k}}{\partial x^{\lambda_k}} T^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_k} \tag{1.1}$$

als entsprechender Riemann-Tensor *(meist Indizes κ, λ, μ, ν) bezeichnet.*

Ein solcher Riemann-Tensor, oder im folgenden auch nur Tensor, transformiert sich nun zwischen zwei Koordinatensystemen x und x' wie folgt:

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}} \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial \xi^{\beta_k}}{\partial x'^{\nu_k}} T^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_k} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\kappa_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\kappa_n}} \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_k}}{\partial x'^{\nu_k}} \cdot \frac{\partial x^{\kappa_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\kappa_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}} \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \xi^{\beta_k}}{\partial x^{\lambda_k}} T^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_k} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\kappa_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\kappa_n}} \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_k}}{\partial x'^{\nu_k}} T^{\kappa_1\dots\kappa_n}_{\lambda_1\dots\lambda_k}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es werde als Abkürzung eingeführt:

Definition 1.2. *Für zwei Koordinatensysteme x und x' sind:*

$$\alpha^\zeta_\eta := \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\eta} \tag{1.3}$$

$$\overline{\alpha}^\zeta_\eta := \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\eta} \tag{1.4}$$

die Transformationsmatrizen *zwischen diesen beiden Koordinatensystemen.*

Damit wird die Transformation eines Riemann-Tensors aus Gleichung (1.2) zu:

$$T'^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} = \alpha^{\mu_1}_{\kappa_1}\dots\alpha^{\mu_n}_{\kappa_n}\overline{\alpha}^{\lambda_1}_{\nu_1}\dots\overline{\alpha}^{\lambda_k}_{\nu_k}T^{\kappa_1\dots\kappa_n}_{\lambda_1\dots\lambda_k}. \tag{1.5}$$

Teils werden Riemann-Tensoren auch direkt als diejenigen mathematischen Objekte definiert, die sich unter einem Koordinatensystemwechsel genau so transformieren.

Die partielle Differentiation kann mit der Kettenregel wie ein Riemann-Tensor behandelt werden:

$$\partial'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \overline{\alpha}^\beta_\alpha\partial_\beta \tag{1.6}$$

wird aber nicht zu diesen gezählt, da sie als Operator auf nachgestellte Tensoren wirkt und bei dessen Transformation benutzte Transformationsmatrizen nicht einfach herausgeholt werden können.

Meist wird sie bei der Anwendung auf einen Tensor auch durch ein , oder | an diesem abgekürzt:

$$T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k,\lambda} \qquad \text{oder} \qquad T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k|\lambda} \tag{1.7}$$

Definition 1.3 (Kronecker-Delta)**.** *Es ist:*

$$\delta^\mu_\nu := \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{cases} 0 & ,\mu \neq \nu \\ 1 & ,\mu = \nu \end{cases} \tag{1.8}$$

das Kronecker-Delta.

Da die Definition koordinatensystemunabhängig ist muss das Kronecker-Delta ein Riemann-Tensor sein:

$$\delta'^\mu_\nu \overset{!}{=} \delta^\mu_\nu = \alpha^\mu_\lambda\overline{\alpha}^\lambda_\nu = \alpha^\mu_\kappa\overline{\alpha}^\lambda_\nu\delta^\kappa_\lambda \tag{1.9}$$

Definition 1.4 (Delta-Tensor)**.** *Es ist:*

$$\delta^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_n} := \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta^{\sigma(\mu_1)}_{\nu_1}\dots\delta^{\sigma(\mu_n)}_{\nu_n} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta^{\mu_1}_{\sigma(\nu_1)}\dots\delta^{\mu_n}_{\sigma(\nu_n)} \tag{1.10}$$

der Delta-Tensor.

Da dieser aus Produkten und Summen des Kronecker-Deltas besteht, welches ein Riemann-Tensor ist, ist der Delta-Tensor tatsächlich ein Riemann-Tensor. Mit diesem sei nun für einen Riemann-Tensor $T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}$ definiert:

$$T^{[\mu_1\dots\mu_m]\mu_{m+1}\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_m}\mathrm{sgn}(\sigma)T^{\mu_{\sigma(1)}\dots\mu_{\sigma(m)}\mu_{m+1}\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} = \frac{1}{n!}\delta^{\mu_1\dots\mu_m}_{\kappa_1\dots\kappa_m}T^{\kappa_1\dots\kappa_m\mu_{m+1}\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} \tag{1.11}$$

$$T^{\mu_1\dots\mu_n}_{[\nu_1\dots\nu_l]\nu_{l+1}\dots\nu_k} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_l}\mathrm{sgn}(\sigma)T^{\mu_1\dots\mu_n}_{[\nu_{\sigma(1)}\dots\nu_{\sigma(l)}]\nu_{l+1}\dots\nu_k} = \frac{1}{n!}\delta^{\kappa_1\dots\kappa_l}_{\nu_1\dots\nu_l}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\kappa_1\dots\kappa_l\nu_{l+1}\dots\nu_k} \tag{1.12}$$

Ohne das Signum der Permutation sei des weiteren:

$$T^{(\mu_1\dots\mu_m)\mu_{m+1}\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_m}T^{\mu_{\sigma(1)}\dots\mu_{\sigma(m)}\mu_{m+1}\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} \tag{1.13}$$

$$T^{\mu_1\dots\mu_n}_{(\nu_1\dots\nu_l)\nu_{l+1}\dots\nu_k} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_l} T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_{\sigma(1)}\dots\nu_{\sigma(l)}\nu_{l+1}\dots\nu_k} \tag{1.14}$$

Indizes, die in den Klammern $[\dots]$ und $(\dots)$ nochmal von $|\dots|$ unschlossen sind gelten als von der Klammer ausgeschlossen und werden bei der Permutation nicht berücksichtigt. Ist ein Tensor symmetrisch bzw. antisymmetrisch in zwei Indizes, verschwindet dieser bei Anwendung der Klammer $[\dots]$ bzw. $(\dots)$, sofern beide Indizes darin enthalten sind.

Mit der jeweils ersten Definition lässt sich der Delta-Tensor auch schreiben als:

$$\delta^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_n} = \delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\dots\delta^{\mu_n]}_{\nu_n} = \delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\dots\delta^{\mu_n}_{\nu_n]} \tag{1.15}$$

Definition 1.5 (Levi-Civita-Symbol)**.** *Es ist:*

$$\epsilon^{\mu_1\dots\mu_n} := \delta^{\mu_1\dots\mu_n}_{1\dots n} \tag{1.16}$$

$$\epsilon_{\nu_1\dots\nu_n} := \delta^{1\dots n}_{\nu_1\dots\nu_n} \tag{1.17}$$

das Levi-Civita-Symbol *(auch* Permutationssymbol *oder* Epsilon-Tensor*)*

Obwohl es die Definition vermuten lässt ist das Levi-Civita-Symbol kein Tensor.

1.2 Wegelement und metrischer Tensor

Das Wegelement transformiert sich

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha(\mathbf{x})\mathrm{d}\xi^\beta(\mathbf{x}) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta(\mathbf{x})}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{1.18}$$

Dabei wurde als Abkürzung eingeführt.

Definition 1.6 (Metrischer Tensor)**.** *Die gekrümmte Raumzeit wird beschrieben durch die dem Minkowski-Tensor entsprechenden Riemann-Tensor, dem* metrischen Tensor*:*

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) := \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} \tag{1.19}$$

und dessem Inversem:

$$g^{\mu\nu}(\mathbf{x}) := \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\mu(\xi(\mathbf{x}))}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu(\xi(\mathbf{x}))}{\partial\xi^\beta} \tag{1.20}$$

Dieser beschreibt nun in einer gekrümmten Raumzeit das Wegelement und da er per Definition ein Riemann-Tensor ist, ist dieses koordinatensysteminvariant:

$$\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\kappa\lambda}(\mathbf{x})\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\kappa\lambda}(\mathbf{x})\mathrm{d}x^\kappa\mathrm{d}x^\lambda = \mathrm{d}^2s. \tag{1.21}$$

Da der Minkowski-Tensor symmetrisch ist, ist es auch der metrische Tensor. Das die beiden Tensoren tatsächlich invers zueinander sind wird gezeigt durch:

$$g^{\kappa\mu}g_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\gamma}{\partial x^\mu}}_{=\delta^\gamma_\beta}\frac{\partial\xi^\delta}{\partial x^\nu} = \underbrace{\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\delta}}_{=\delta^\alpha_\delta}\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\delta}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} = \delta^\kappa_\nu. \tag{1.22}$$

Der d'Alembert- oder Wellenoperator lässt sich durch $\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ darstellen. Dies lässt sich verallgemeinern zu:

Definition 1.7 (d'Alembert-Operator)**.** *Der verallgemeinerte* d'Alembert-Operator *ist:*

$$\Box := g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.23}$$

Falls Verwechselungen auftreten können werden die Darstellungen $\Box_\eta$ und $\Box_g$ benutzt.

Der metrische Tensor und dessen Invereses können damit als zueinander inverse Matrizen aufgefasst werden. Für die Determinante des metrischen Tensors gilt nun:

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \epsilon^{\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_3} g_{0\kappa_0} g_{1\kappa_1} g_{2\kappa_2} g_{3\kappa_3} \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = \sum_\mu \epsilon^{\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_3} g_{0\kappa_0} \cdots \frac{\partial g_{\mu\kappa_\mu}}{\partial x^\lambda} \cdots g_{3\kappa_3} \tag{1.25}$$

Mit:

$$\frac{\partial g_{\mu\kappa_\mu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta^\nu_{\kappa_\mu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} g^{\nu\xi} g_{\xi\kappa_\mu} \tag{1.26}$$

An die Stelle des in Gleichung (XXXX) herausfallenden Faktors $g_{\mu\kappa_\mu}$ tritt nun also $g_{\xi\kappa_\mu}$. Für $\mu \neq \xi$ ist dann das Produkt $g_{\xi\kappa_\mu} g_{\xi\kappa_\xi}$ enthalten, welches symmetrisch in κ_μ und κ_ξ ist fällt aufgrund der Antisymmetrie des Epsilontensors in diesen beiden Indizes weg. Nur der Term mit $\mu = \xi$ wird übernommen und daher:

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} g \Leftrightarrow \partial_\lambda \ln(-g) = g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{1.27}$$

Das Minus wurde eingefügt, da die Determinante $\eta = \det(\eta_{\mu\nu}) = -1$ des Minkowski-Tensors negativ ist und daher auch die des zu diesem kongruenten metrischen Tensors.

Für die Kontraktion des Christoffelsymbols zweiter Art folgt nun:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda \ln\sqrt{-g} \tag{1.28}$$

1.3 Tensordichten

Definition 1.8 (Tensordichte)**.** *Ein mathematisches Objekt* $\mathfrak{T}$ *das sich unter einem Koordinatensystemwechsel transformiert gemäß:*

$$\mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} = \det\left(\overline{\alpha}\right)^W \alpha^{\mu_1}_{\kappa_1} \dots \alpha^{\mu_n}_{\kappa_n} \overline{\alpha}^{\lambda_1}_{\nu_1} \dots \overline{\alpha}^{\lambda_k}_{\nu_k} \mathfrak{T}^{\kappa_1\dots\kappa_n}_{\lambda_1\dots\lambda_k} \tag{1.29}$$

ist eine Tensordichte *mit* Gewicht W*.*

Die Determinante des metrischen Tensors ist eine Tensordichte mit Gewicht 2, da:

$$g'_{\kappa\lambda} = \overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow g' = \det(\overline{\alpha})^2 g \tag{1.30}$$

$$g'^{\kappa\lambda} = \alpha^\kappa_\mu \alpha^\lambda_\nu g^{\mu\nu} \Rightarrow g'^{-1} = \det(\alpha)^2 g^{-1} \tag{1.31}$$

Meist wird die Wurzel der Determinante als Tensordichte mit Gewicht 1 genutzt:

$$\sqrt{-g'} = \det(\overline{\alpha})\sqrt{-g} \tag{1.32}$$

Aus einer Tensordichte $\mathfrak{T}$ mit Gewicht W lässt sich so stets ein Tensor konstruieren durch:

$$T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} = \sqrt{-g}^{-W}\mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} \tag{1.33}$$

Das Volumenelement transformiert nun gemäß:

$$\mathrm{d}^4x' = \det\frac{\partial x'}{\partial x}\mathrm{d}^4x = \det(\alpha)\mathrm{d}^4x \tag{1.34}$$

Mit Gleichung (1.32) folgt, dass

$$\mathrm{d}^4V := \mathrm{d}^4x\sqrt{-g} \tag{1.35}$$

invariant unter einem Koordinatensystemwechsel ist. Es wird daher *invariantes Volumenelement* genannt.

Das Levi-Civita-Symbol ist zwar kein Tensor, aber Tensordichte:

$$\epsilon'^{\mu_1\dots\mu_n} = \det(\overline{\alpha})^W\alpha^{\mu_1}_{\nu_1}\dots\alpha^{\mu_n}_{\nu_n}\epsilon^{\nu_1\dots\nu_n} = \det(\overline{\alpha})^{W-1}\epsilon^{\mu_1\dots\mu_n} \overset{!}{=} \epsilon^{\mu_1\dots\mu_n} \tag{1.36}$$

$$\epsilon'_{\mu_1\dots\mu_n} = \det(\overline{\alpha})^W\overline{\alpha}^{\nu_1}_{\mu_1}\dots\overline{\alpha}^{\nu_n}_{\mu_n}\epsilon_{\nu_1\dots\nu_n} = \det(\overline{\alpha})^{W+1}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_n} \overset{!}{=} \epsilon_{\mu_1\dots\mu_n} \tag{1.37}$$

Da die Definition koordinatensystemunabhängig ist muss das kontravariante Levi-Civita-Symbol eine Tensordichte mit Gewicht 1 und das kovariante eine mit Gewicht -1 sein. Nun sind:

$$E^{\mu_1\dots\mu_n} := \epsilon^{\mu_1\dots\mu_n}\sqrt{-g}^{-1} \tag{1.38}$$

$$E_{\mu_1\dots\mu_n} := \epsilon_{\mu_1\dots\mu_n}\sqrt{-g} \tag{1.39}$$

Tensoren.

Kapitel 2

Die Geodätengleichung

Die *Geodätengleichung* beschreibt die Bewegung eines Teilchens in einer gekrümmten Raumzeit. Sie ersetzt die Newtonsche Bewegungsgleichung und zeigt, dass des weiteren auch das Gravitationspotential als Träger der Information über die Gravitation ersetzt werden muss, nämlich durch den metrischen Tensor.

2.1 Herleitung der Geodätengleichung aus dem Äquivalenzprinzip

Gemäß des Äquivalenzprinzips kann stets ein Inertialsystem mit einem freifallenden Koordinatensystem ξ^α gefunden werden, in welchem die Gravitation lokal verschwindet und für die Bewegung eines ansonsten kräftefreien Teilches damit das dritte Newtonsche Gesetz gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = k^\alpha \tag{2.1}$$

Dabei ist k^α ein alle nichtgravitativen auf die Masse bezogenen Kraftdichten enthaltender Lorentz-Tensor. Durch Transformation auf ein anderes Koordinatensystem x^μ folgt mit dem entsprechenden Riemann-Tensor k^σ daraus:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} &= k^\alpha \\ \overset{\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\alpha}}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}^2x^\sigma}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} &= k^\sigma\end{aligned} \tag{2.2}$$

Es werde als Abkürzung eingeführt:

Definition 2.1 (Christoffelsymbol zweiter Art)**.** *Der Ausdruck:*

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} := \frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \tag{2.3}$$

ist das Christoffelsymbol zweiter Art.

Dieses ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch in den beiden kovarianten Indizes:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \tag{2.4}$$

Es enthält die Information über die Gravitation und aufgrund der Ähnlichkeiten der Definitionen ist zu vermuten, dass es sich durch den metrischen Tensor mithilfe von dessen erster differentiation ausdrücken lässt.

Gleichung (2.2) ergibt nun die endgültige Form der *Geodätengleichung*:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = k^\sigma \tag{2.5}$$

Für masselose Teilchen wie Photonen verschwindet der Eigenzeitparameter $\mathrm{d}\tau$, daher wird stattdessen allgemeiner der *Bahnparameter* $\mathrm{d}\lambda$ verwendet.

Der Bezeichnung Geodätengleichung kommt daher, dass ihre Lösungen, die *Geodäten* oder *Geodätischen* genannt werden, in der gekrümmten Raumzeit jeweils die kürzeste mögliche Verbindung zwischen zwei Raumzeitpunkten sind.

2.2 Herleitung der Geodätengleichung aus dem Variationsprinzip

Mathematisch wird diese Eigenschaft dadurch ausgedrückt, dass die Geodätengleichung äquivalent zum folgenden einfachen Variationsprinzip ist:

$$\delta s = \delta \int \mathrm{d}\lambda \, \mathcal{L} = 0 \tag{2.6}$$

Die Lagrangedichte ergibt sich nun durch:

$$s = \int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = \int \mathrm{d}\lambda \left(g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{1/2} \Rightarrow \mathcal{L}(\lambda, x, \dot{x}) = \left(g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Die zum Hamiltonschen Variationsprinzip äquivalente Lagrange-Gleichung führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\kappa} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\kappa} \left(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \right) - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(g_{\kappa\nu} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} + g_{\mu\kappa} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x^\mu} \right) - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left(g_{\kappa\rho} \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Durch Anwendung von $g^{\sigma\kappa}$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{2.9}$$

Dies ist wieder die Geodätengleichung, wobei sich das Christoffelsymbol hier bereits in der wesentlich häufiger verwendeten Darstellung aus dem metrischen Tensor ergeben hat. Diese ist äquivalent zur Definition (2.1), wie sich durch explizites Ausrechnen zeigen lässt.

2.3 Christoffelsymbole

Satz 2.2. *Das Christoffelsymbol zweiter Art hat die äquivalente Darstellung:*

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \tag{2.10}$$

aus dem metrischen Tensor.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \\
=&\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\kappa} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} \right) \right\} \\
=&\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \left\{ \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 \xi^\delta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\delta}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\delta}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} \right\} \\
=&\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \left\{ \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 \xi^\delta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\kappa} \right\} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

□

Definition 2.3 (Christoffelsymbol erster Art)**.** *Es ist:*

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} := g_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{2.12}$$

das Christoffelsymbol erster Art.

Aus Gleichung (XXXX) überträgt sich die Symmetrie der hintern beiden kovarianten Indizes:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu} \tag{2.13}$$

$$\Gamma_{[\lambda\mu\nu]} = \Gamma_{\lambda[\mu\nu]} = 0 \tag{2.14}$$

Zudem ergibt sich die Identität:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right) = \partial_\nu g_{\lambda\mu} \tag{2.15}$$

Das Christoffelsymbol zweiter Art ist kein Tensor, denn es transformiert sich gemäß:

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\kappa x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda} = \alpha^\rho_\sigma \overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \alpha^\rho_\tau \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Zusätzlich zu den Christoffelsymbolen wird meist definiert:

$$\Gamma^\sigma := g^{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\kappa} \partial^\mu g_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\sigma g_{\mu\nu}. \tag{2.17}$$

Satz 2.4 (DeDonder-Eichung)**.** *Es gibt stets ein Koordinatensystem, in dem:*

$$\Gamma^\sigma = 0. \tag{2.18}$$

Dies ist die DeDonder-Eichung *(auch* harmonische Eichung*) des Koordinatensystems.*

Beweis. Wird die Transformation des inversen metrischen Tensors nach Gleichung (**??**) darauf angewendet ergibt sich:

$$\Gamma'^\rho = \alpha^\rho_\tau(\Gamma^\tau + \Box' x^\tau) \Leftrightarrow \Gamma^\tau = \overline{\alpha}^\tau_\rho \Gamma'^\rho - \Box' x^\tau \tag{2.19}$$

Für ein Koordinatensystem x'^σ ergibt damit das Lösen der Differentialgleichung:

$$\Box' x^\tau = \overline{\alpha}^\tau_\rho \Gamma'^\rho \tag{2.20}$$

stets ein Koordinatensystem x^ρ, in dem $\Gamma^\tau = 0$. □

Satz 2.5. *Die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m und Impuls p ist:*

$$H(x,p) = \frac{1}{2m} p^\sigma p_\sigma \tag{2.21}$$

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} = \frac{1}{2m} p^\sigma \tag{2.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2m} \partial_\sigma g_{\kappa\lambda} p^\kappa p^\lambda \tag{2.23}$$

□

Kapitel 3

Newtonscher Grenzfall der Geodätengleichung

Die Geodätengleichung muss für kleine Geschwindigkeiten und statische (also zeitunabhängige) schwache Felder den nichtrelativistischen *Newtonschen Grenzfall* ergeben:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = -\nabla\Phi \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} = \eta^{ij}\partial_j\Phi. \tag{3.1}$$

Die Verwendung des Minkowski-Tensors, für den sämtliche Christoffelsymbole verschwinden, kann diesen nicht ergeben, es ist daher zu vermuten, dass eine Korrektur mit dem Newtonschen Gravitationspotential Φ gemacht werden muss.

Für kleine Geschwindigkeiten ist nur die zeitliche Komponente relevant und eingesetzt in die homogene Geodätengleichung (2.5) ist damit:

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \approx c, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \approx 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx -c^2\Gamma^i_{00}. \tag{3.2}$$

Für statische Felder verschwinden sämtliche Zeitdifferentiationen ∂_0 des metrischen Tensors, womit für das Christoffelsymbol zweiter Art nach Satz (2.2):

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{00} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}g^{ij}\partial_j g_{00}. \tag{3.3}$$

Für schwache Felder werden zudem die räumlichen Komponenten des metrischen Tensors als jene des Minkowski-Tensors genähert:

$$g^{ij} \approx \eta^{ij} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\eta^{ij}\partial_j g_{00} \overset{!}{=} \eta^{ij}\partial_j\Phi. \tag{3.4}$$

Der Newtonsche Grenzfall manifestiert sich nun in der Störung der g_{00}-Komponente durch:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{3.5}$$

Die Integrationskonstante von $+1$ ist nötig, damit sich für $\Phi \to 0$ die Minkowski-Metrik ergibt. Die Störung kann nun als Parameter interpretiert werden, der den Einfluss relativistischer Korrekturen angibt.

Kapitel 4

Kovariante und Lie-Differentiation

Das Problem mit der partiellen Differentiation in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass die Anwendung auf einen Riemann-Tensor nicht unbedingt wieder zu einem Riemann-Tensor führen muss. Deshalb ist es nötig eine neue Art der Differentiation zu konstruieren für die dies der Fall ist.

4.1 Kovariante Differentiation

Die partielle Differentiation eines kontravarianten Vektorfeldes ξ transformiert gemäß:

$$\begin{aligned}\partial'_\kappa \xi'^\rho &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\xi^\sigma\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\xi^\sigma \\ &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \alpha^\rho_\sigma \partial_\mu \xi^\sigma - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\alpha^\lambda_\sigma \alpha^\rho_\mu \xi^\sigma. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Der hintere Term verhindert, dass sich $\partial_\mu \xi^\sigma$ wie ein Tensor transformiert und erinnert an den der dies in Gleichung (2.16) auch beim Christoffelsymbol zweiter Art verhindert. Durch Kombination transformiert sich nun die Größe $\partial_\mu \xi^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi^\nu$ wie ein Riemann-Tensor, der als $\nabla_\mu \xi^\sigma$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}\partial'_\kappa \xi'^\rho + \Gamma'^\rho_{\kappa\lambda}\xi'^\lambda &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \alpha^\rho_\sigma \partial_\mu \xi^\sigma - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\alpha^\lambda_\sigma \alpha^\rho_\mu \xi^\sigma + \left(\overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda \alpha^\rho_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \alpha^\rho_\tau \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\right)\alpha^\lambda_\nu \xi^\nu \\ &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \alpha^\rho_\sigma \left(\partial_\mu \xi^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi^\nu\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die partielle Differentiation eines kovarianten Vektorfeldes ζ transformiert gemäß:

$$\begin{aligned}\partial'_\kappa \zeta'_\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}\zeta_\nu\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial \zeta_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\zeta_\nu \\ &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda \partial_\mu \zeta_\nu + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\zeta_\nu. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Wieder durch Kombination mit Gleichung (2.16) transformiert sich nun die Größe $\partial_\mu \zeta_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\zeta_\sigma$ wie ein Riemann-Tensor, der als $\nabla_\mu \zeta_\nu$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}\partial'_\kappa \zeta'_\lambda - \Gamma'^\rho_{\kappa\lambda}\zeta'_\rho &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda \partial_\mu \zeta_\nu + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\zeta_\nu - \left(\overline{\alpha}^\mu_\kappa \overline{\alpha}^\nu_\lambda \alpha^\rho_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \alpha^\rho_\tau \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}\right)\overline{\alpha}^\nu_\rho \zeta_\nu \\ &= \overline{\alpha}^\mu_\kappa \alpha^\rho_\sigma \left(\partial_\mu \zeta_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\zeta_\sigma\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Mit diesen Überlegungen kann nun eine neue Art der Differentiation definiert werden.

Definition 4.1 (Kovariante Differentiation)**.** *Für einen Riemann-Tensor* $T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}$ *ist:*

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} := \partial_\lambda T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\sigma} T^{\sigma\dots\mu_n}_{\mu_1\dots\nu_k} + \dots + \Gamma^{\mu_n}_{\lambda\sigma} T^{\mu_1\dots\sigma}_{\nu_1\dots\nu_k} \\ - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\sigma\dots\nu_k} - \dots - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_k} T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\sigma}\end{aligned} \tag{4.5}$$

die kovariante Differentiation *des Tensors.*

Jeder kontravariante Index muss also durch einen $+\Gamma$-Term und jeder kovariante durch einen $-\Gamma$-Term berücksichtigt werden. Mit der Produktregel der partiellen Differentiation für den ersten Term folgt, dass die kovariante Differentiation ebenfalls die Produktregel erfüllt.

Die kovariante Differentiation eines Tensors ist wieder ein Tensor, wie sich durch eine recht aufwendige Rechnung zeigen lässt. Meist wird sie auch durch ein ; oder $\|$ an diesem abgekürzt:

$$T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k;\lambda} \qquad \text{oder} \qquad T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k\|\lambda} \tag{4.6}$$

Gelegentlich findet sich auch die Schreibweise D_λ statt ∇_λ.

Die kovariante Differentiation lässt sich mit Gleichung (1.33) allgemeiner für eine Tensordichte mit Gewicht W definieren, wenn diese zunächst in einen Tensor umgewandelt und dann wieder auf ihr ursprüngliches Gewicht gebracht wird. Dies führt zu einem Zusatzterm:

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} &:= \sqrt{-g}^{W} \nabla_\lambda [\sqrt{-g}^{-W} \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}] \\ &= \partial_\lambda \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} - W\Gamma^{\kappa}_{\kappa\lambda} \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\sigma} \mathfrak{T}^{\sigma\dots\mu_n}_{\mu_1\dots\nu_k} + \dots + \Gamma^{\mu_n}_{\lambda\sigma} \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\sigma}_{\nu_1\dots\nu_k} \\ &\quad - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_1} \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\sigma\dots\nu_k} - \dots - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_k} \mathfrak{T}^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\sigma}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die kovariante Differentiation eines Tensors und einer Tensordichte führt bei Abwesenheit von Gravitation mit verschwindenden Christoffelsymbolen jeweils wieder auf die partielle Differentiation zurück und eignet sich daher dafür bekannte Gesetze ohne Gravitation auf solche mit dieser zu verallgemeinern.

Für die kovariante Differentiation eines kontravarianten Vektorfeldes ζ gilt mit Gleichung (1.28):

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \xi^\mu = \partial_\mu \xi^\mu + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} \xi^\sigma = \partial_\mu \xi^\mu + \xi^\mu \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\xi^\mu\right)}{\sqrt{-g}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{-g}\nabla_\mu \xi^\mu = \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\xi^\mu\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dieses Resultat lässt sich im Gaußschen Integralsatz anwenden, wobei dabei auch das invariante Volumenelement aus Gleichung (1.35) auftaucht:

$$\int_\Sigma \mathrm{d}^4 V \, \nabla_\mu \xi^\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}^4 x \, \sqrt{-g} \nabla_\mu \xi^\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}^4 x \, \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\xi^\mu\right) = \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}n_\mu \, \sqrt{-g}\xi^\mu. \tag{4.9}$$

Für die kovariante Differentiation eines antisymmetrischen Tensors F gilt mit Gleichung (1.28):

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu} + \underbrace{\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma}}_{=0} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\sigma\nu} \frac{\partial_\sigma \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_\mu \left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)}{\sqrt{-g}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{-g}\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dieses Resultat lässt sich ebenfalls im Gaußschen Integralsatz anwenden:

$$\int_\Sigma \mathrm{d}^4V\,\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \int_\Sigma \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \int_\Sigma \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}n_\mu\,\sqrt{-g}F^{\mu\nu}. \tag{4.11}$$

Die kovariante Differentiation des Delta-Tensors verschwindet, da:

$$\nabla_\xi \delta^\mu_\nu = \partial_\xi\delta^\mu_\nu - \Gamma^\sigma_{\xi\nu}\delta^\mu_\sigma + \Gamma^\mu_{\xi\sigma}\delta^\sigma_\nu = -\Gamma^\mu_{\xi\nu} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\xi \delta^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_n} = 0. \tag{4.12}$$

Die kovariante Differentiation des metrischen Tensors verschwindet aufgrund von Gleichung (2.15), woraus folgt, dass dieser mit der kovarianten Differentiation kommutiert:

$$\begin{aligned}\nabla_\xi g_{\mu\nu} = \partial_\xi g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\xi\mu}g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\xi\nu}g_{\mu\sigma} = g_{\mu\nu,\xi} - \Gamma_{\nu\xi\mu} - \Gamma_{\mu\xi\nu} = 0 \\ \Rightarrow \nabla_\xi\left(g_{\kappa\lambda}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}\right) = g_{\kappa\lambda}\nabla_\xi T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Mit diesen beiden Resultaten verschwindet auch die kovariante Differentiation des inversen metrischen Tensors, woraus folgt, dass dieser auch kommutieren:

$$\begin{aligned}\nabla_\xi g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\lambda\nabla_\xi g^{\lambda\nu} = g^{\kappa\mu}g_{\kappa\lambda}\nabla_\xi g^{\lambda\nu} = g^{\kappa\mu}\nabla_\xi\left(g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu}\right) = g^{\kappa\mu}\nabla_\xi\delta^\nu_\kappa = 0 \\ \Rightarrow \nabla_\xi\left(g^{\kappa\lambda}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}\right) = g^{\kappa\lambda}\nabla_\xi T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k;\xi}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Für die Eigenzeitdifferentiation gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = u^\mu\partial_\mu \tag{4.15}$$

Durch die verallgemeinernde kovariante Differentiation lässt sich auch die Eigenzeitdifferentiation verallgemeinern.

Definition 4.2 (Totale Eigenzeitdifferentiation)**.** *Es ist:*

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} = u^\mu\nabla_\mu \tag{4.16}$$

die totale Eigenzeitdifferentiation.

Das *totale Differential* eines Riemann-Tensors ist damit:

$$\mathrm{D}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} = \nabla_\lambda T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}\mathrm{d}x^\lambda \tag{4.17}$$

4.2 Lie-Differentiation

Definition 4.3 (Lie-Differentiation)**.** *Für einen Riemann-Tensor $T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}$ und ein differenzierbares kontravariantes Vektorfeld ξ ist:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} &:= \xi^\sigma\partial_\sigma T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} && -T^{\sigma\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}\partial_\sigma\xi^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1\dots\sigma}_{\nu_1\dots\nu_k}\partial_\sigma\xi^{\mu_n} \\ &&& +T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\sigma\dots\nu_k}\partial_{\nu_1}\xi^\sigma + \dots + T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\sigma}\partial_{\nu_k}\xi^\sigma \\ &= \xi^\sigma\nabla_\sigma T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} && -T^{\sigma\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k}\nabla_\sigma\xi^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1\dots\sigma}_{\nu_1\dots\nu_k}\nabla_\sigma\xi^{\mu_n} \\ &&& +T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\sigma\dots\nu_k}\nabla_{\nu_1}\xi^\sigma + \dots + T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\sigma}\nabla_{\nu_k}\xi^\sigma\end{aligned} \tag{4.18}$$

die Lie-Differentiation *des Tensors.*

Für die Lie-Differentiation des Vektorfeldes ξ selbst gilt:

$$\mathcal{L}_\xi \xi^\mu = \xi^\sigma \partial_\sigma \xi^\mu - \xi^\sigma \partial_\sigma \xi^\mu = 0. \tag{4.19}$$

Für die Lie-Differentiation eines anderen kontravarianten Vektorfeldes ζ gilt:

$$\mathcal{L}_\xi \zeta^\mu = \xi^\sigma \partial_\sigma \zeta^\mu - \zeta^\sigma \partial_\sigma \xi^\mu = -\mathcal{L}_\zeta \xi^\mu. \tag{4.20}$$

Mit der Produktregel der partiellen Differentiation folgt, dass die Lie-Differentiation ebenfalls die Produktregel erfüllt. Es resultiert nur die Lie-Differentiation von vollständig kontravarianten Riemann-Tensoren wieder in einem Riemann-Tensor, da:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi'} T'^{\mu} &= \xi'^{\sigma} \partial'_\sigma T'^{\mu} - T'^{\sigma} \partial'_\sigma \xi'^{\mu} = \xi^\rho \partial_\rho (\alpha^\mu_\kappa T^\kappa) - T^\rho \partial_\rho (\alpha^\mu_\kappa \xi^\kappa) \\ &= \alpha^\mu_\kappa (\xi^\rho \partial_\rho T^\kappa - T^\rho \partial_\rho \xi^\kappa) + \xi^\rho T^\kappa \partial_\rho \alpha^\mu_\kappa - \xi^\kappa T^\rho \partial_\rho \alpha^\mu_\kappa = \alpha^\mu_\kappa \mathcal{L}_\xi T^\kappa \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi'} T'_{\ \mu} &= \xi'^{\sigma} \partial'_\sigma T'_{\ \mu} + T'_{\ \sigma} \partial'_\mu \xi'^{\sigma} = \xi^\rho \partial_\rho (\overline{\alpha}^\kappa_\mu T_\kappa) + \overline{\alpha}^\tau_\sigma \overline{\alpha}^\kappa_\mu T_\tau \partial_\kappa (\alpha^\sigma_\rho \xi^\rho) \\ &= \overline{\alpha}^\kappa_\mu (\xi^\rho \partial_\rho T_\kappa + T_\rho \partial_\kappa \xi^\rho) + \xi^\rho T_\tau (\partial_\rho \overline{\alpha}^\tau_\mu + \overline{\alpha}^\tau_\sigma \overline{\alpha}^\kappa_\mu \partial_\kappa \alpha^\sigma_\rho) \\ &= \overline{\alpha}^\kappa_\mu \mathcal{L}_\xi T_\kappa + \xi^\rho T_\tau (\partial_\rho \overline{\alpha}^\tau_\mu + \overline{\alpha}^\tau_\sigma \overline{\alpha}^\kappa_\mu \partial_\kappa \alpha^\sigma_\rho). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Analog für Riemann-Tensoren mit mehreren ko- und/oder kontravarianten Indizes. Für die Lie-Differentiation des metrischen Tensors gilt mit Gleichung (2.15)und (4.13):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma = g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\nu\mu\kappa} \xi^\kappa + g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\nu\kappa} \xi^\kappa \\ &= g_{\sigma\nu} (\partial_\mu \xi^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \xi^\kappa) + g_{\mu\sigma} (\partial_\nu \xi^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} \xi^\kappa) = g_{\sigma\nu} \nabla_\mu \xi^\sigma + g_{\mu\sigma} \nabla_\nu \xi^\sigma \\ &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \propto \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi_1} \mathcal{L}_{\xi_2} \zeta^\mu &= \mathcal{L}_{\xi_1} \left(\xi_2^\rho \partial_\rho \zeta^\mu - \zeta^\rho \partial_\rho \xi_2^\mu \right) \\ &= \xi_1^\sigma \partial_\sigma \left(\xi_2^\rho \partial_\rho \zeta^\mu - \zeta^\rho \partial_\rho \xi_2^\mu \right) - \left(\xi_2^\rho \partial_\rho \zeta^\sigma - \zeta^\rho \partial_\rho \xi_2^\sigma \right) \partial_\sigma \xi_1^\rho \\ &= \xi_1^\sigma \xi_2^\rho \partial_{\rho\sigma} \zeta^\mu \end{aligned} \tag{4.24}$$

Kapitel 5

Krümmungstensoren

Die Christoffelsymbole zweiter Art eignen sich zwar zur Beschreibung der Krümmung der Raumzeit, denn sie verschwinden für eine flache und werden zudem in der Geodätengleichung benutzt, jedoch sind sie aufgrund ihres Transformationsverhaltens nach Gleichung (2.16) keine Riemann-Tensoren. Durch geeignete Kombination lässt sich aus ihnen jedoch ein Riemann-Tensor konstruieren.

5.1 Riemann–Christoffel-Krümmungstensor

Im Gegensatz zu partiellen Differentiationen kommutieren kovariante nicht unbedingt miteinander. Sei ξ ein kontravariantes und ζ ein kovariantes differenzierbares Vektorfeld, dann ist:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\xi^\rho &= (\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\xi^\rho = \nabla_\mu(\partial_\nu\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\xi^\lambda) - \nabla_\nu(\partial_\mu\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\xi^\lambda) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\xi^\lambda) - \Gamma^\tau_{\mu\nu}(\partial_\tau\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\tau\lambda}\xi^\lambda) + \Gamma^\rho_{\mu\tau}(\partial_\nu\xi^\tau + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\xi^\lambda) \\
&- \partial_\nu(\partial_\mu\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\xi^\lambda) + \Gamma^\tau_{\nu\mu}(\partial_\tau\xi^\rho + \Gamma^\rho_{\tau\lambda}\xi^\lambda) - \Gamma^\rho_{\nu\tau}(\partial_\mu\xi^\tau + \Gamma^\tau_{\mu\lambda}\xi^\lambda) \\
&= \partial_\mu(\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\xi^\lambda) + \Gamma^\rho_{\mu\tau}(\partial_\nu\xi^\tau + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\xi^\lambda) - \partial_\nu(\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\xi^\lambda) - \Gamma^\rho_{\nu\tau}(\partial_\mu\xi^\tau + \Gamma^\tau_{\mu\lambda}\xi^\lambda) \\
&= \left(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}\right)\xi^\lambda = R^\rho_{\lambda\mu\nu}\xi^\lambda
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\zeta_\lambda &= (\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\zeta_\lambda = \nabla_\mu(\partial_\nu\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\zeta_\rho) - \nabla_\nu(\partial_\mu\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\zeta_\rho) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\zeta_\rho) - \Gamma^\tau_{\mu\nu}(\partial_\tau\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\tau\lambda}\zeta_\rho) - \Gamma^\tau_{\mu\lambda}(\partial_\nu\zeta_\tau - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\zeta_\rho) \\
&- \partial_\nu(\partial_\mu\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\zeta_\rho) + \Gamma^\tau_{\nu\mu}(\partial_\tau\zeta_\lambda - \Gamma^\rho_{\tau\lambda}\zeta_\rho) + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}(\partial_\mu\zeta_\tau - \Gamma^\rho_{\mu\tau}\zeta_\rho) \\
&= -\partial_\mu(\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\zeta_\rho) - \Gamma^\tau_{\mu\lambda}(\partial_\nu\zeta_\tau - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\zeta_\rho) + \partial_\nu(\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\zeta_\rho) + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}(\partial_\mu\zeta_\tau - \Gamma^\rho_{\mu\tau}\zeta_\rho) \\
&= -\left(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}\right)\zeta_\rho = -R^\rho_{\lambda\mu\nu}\zeta_\rho.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Erstaunlicherweise enthält das Ergebnis beide Male keine partiellen Differentiationen der Vektorfelder ζ bzw. ξ. Im letzten Schritt wurde jeweils als Abkürzung eingeführt:

Definition 5.1 (Riemann–Christoffel-Krümmungstensor)**.** *Der Riemann-Tensor:*

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} := -2(\Gamma^\rho_{\lambda[\mu,\nu]} + \Gamma^\tau_{\lambda[\mu}\Gamma^\rho_{\nu]\tau}) = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \tag{5.3}$$

ist der Riemann–Christoffel-Krümmungstensor *(auch* Riemann-Krümmungstensor*), der bei Abwesenheit von Gravitation verschwindet.*

Aufgrund der Konstruktion in den Gleichungen (5.1) und (5.2) folgt, dass dieser tatsächlich ein Riemann-Tensor ist, was ebenso mit der Definition gezeigt werden kann.

Satz 5.2. *Der Riemann–Christoffel-Krümmungstensor ist tatsächlich ein Riemann-Tensor, transformiert also gemäß:*

$$R'^{\eta}_{\lambda\xi\kappa} = \alpha^{\eta}_{\pi}\overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\upsilon}_{\xi}R^{\pi}_{\nu\upsilon\mu}. \tag{5.4}$$

Beweis. Aus der Transformation des Christoffelsymbols zweiter Art nach Gleichung (2.16) folgt durch Anwendung von $\overline{\alpha}^{\pi}_{\rho}$ und Umstellung:

$$\frac{\partial^2 x^{\pi}}{\partial x'^{\kappa}\partial x'^{\lambda}} = \overline{\alpha}^{\pi}_{\rho}\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}. \tag{5.5}$$

Durch Differentiation nach x'^{ξ} und erneutes Einsetzen der Gleichung mit vertauschten Indizes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x^{\pi}}{\partial x'^{\kappa}\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\xi}} &= \frac{\partial^2 x^{\pi}}{\partial x'^{\xi}\partial x'^{\rho}}\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} + \overline{\alpha}^{\pi}_{\rho}\frac{\partial\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda}}{\partial x'^{\xi}} \\
&- \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}\partial x'^{\xi}}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\pi}_{\mu\nu} - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\xi}}\Gamma^{\pi}_{\mu\nu} - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\upsilon}_{\xi}\frac{\partial\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}}{\partial x^{\upsilon}} \\
&= \left(\overline{\alpha}^{\pi}_{\zeta}\Gamma'^{\zeta}_{\xi\rho} - \overline{\alpha}^{\zeta}_{\xi}\overline{\alpha}^{\eta}_{\rho}\Gamma^{\pi}_{\zeta\eta}\right)\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} + \overline{\alpha}^{\pi}_{\rho}\frac{\partial\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda}}{\partial x'^{\xi}} \\
&- \left(\overline{\alpha}^{\mu}_{\zeta}\Gamma'^{\zeta}_{\kappa\xi} - \overline{\alpha}^{\zeta}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\eta}_{\xi}\Gamma^{\mu}_{\zeta\eta}\right)\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\pi}_{\mu\nu} - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\left(\overline{\alpha}^{\nu}_{\zeta}\Gamma'^{\zeta}_{\lambda\xi} - \overline{\alpha}^{\zeta}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\eta}_{\xi}\Gamma^{\nu}_{\zeta\eta}\right)\Gamma^{\pi}_{\mu\nu} - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\upsilon}_{\xi}\frac{\partial\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}}{\partial x^{\upsilon}} \\
&= \overline{\alpha}^{\pi}_{\zeta}\left(\frac{\partial\Gamma'^{\zeta}_{\kappa\lambda}}{\partial x'^{\xi}} + \Gamma'^{\zeta}_{\xi\rho}\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda}\right) - \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\upsilon}_{\xi}\left(\frac{\partial\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}}{\partial x^{\upsilon}} - \Gamma^{\rho}_{\mu\upsilon}\Gamma^{\pi}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\upsilon}\Gamma^{\pi}_{\mu\rho}\right) \\
&- \left(\overline{\alpha}^{\mu}_{\xi}\overline{\alpha}^{\nu}_{\rho}\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} + \overline{\alpha}^{\mu}_{\zeta}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\Gamma'^{\zeta}_{\kappa\xi} + \overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\zeta}\Gamma'^{\zeta}_{\lambda\xi}\right)\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Werden die Indizes κ und ξ vertauscht und die resultierende Gleichung von dieser abgezogen kürzen sich die $\Gamma'\Gamma$-Terme heraus und:

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}^{\pi}_{\zeta}\left(\frac{\partial\Gamma'^{\zeta}_{\kappa\lambda}}{\partial x'^{\xi}} - \frac{\partial\Gamma'^{\zeta}_{\xi\lambda}}{\partial x'^{\kappa}} + \Gamma'^{\zeta}_{\xi\rho}\Gamma'^{\rho}_{\kappa\lambda} - \Gamma'^{\zeta}_{\kappa\rho}\Gamma'^{\rho}_{\xi\lambda}\right) \\
-&\overline{\alpha}^{\mu}_{\kappa}\overline{\alpha}^{\nu}_{\lambda}\overline{\alpha}^{\upsilon}_{\xi}\left(\frac{\partial\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}}{\partial x^{\upsilon}} - \frac{\partial\Gamma^{\pi}_{\upsilon\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\Gamma^{\pi}_{\upsilon\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\upsilon}\Gamma^{\pi}_{\mu\rho}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Durch Anwendung von α^{η}_{π} ist dies genau die Transformation des Riemann–Christoffel-Krümmungstensors als Riemann-Tensor. □

Satz 5.3. *Die beiden Gleichungen (5.1) und (5.2) sind Spezialfälle der allgemeineren Gleichung:*

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\kappa}, \nabla_{\lambda}]T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} &= R^{\mu_1}_{\sigma\kappa\lambda}T^{\sigma\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\nu_k} + \dots + R^{\mu_n}_{\sigma\kappa\lambda}T^{\mu_1\dots\sigma}_{\nu_1\dots\nu_k} \\
&- R^{\sigma}_{\nu_1\kappa\lambda}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\sigma\dots\nu_k} - \dots - R^{\sigma}_{\nu_k\kappa\lambda}T^{\mu_1\dots\mu_n}_{\nu_1\dots\sigma}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2 Kovarianter Krümmungstensor

Meist wird der Krümmungstensor in eine vollständig kovariante Form überführt.

Definition 5.4 (Kovarianter Krümmungstensor)**.** *Der Riemann-Tensor:*

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} := g_{\kappa\rho} R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} \tag{5.9}$$

ist der kovariante Krümmungstensor.

Aus Gleichung (5.1) folgt die Darstellung:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\rho}\left(\partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\right)$$

$$\begin{aligned} g_{\kappa\rho}\left(\partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\right) &= g_{\kappa\rho}\left(g^{\rho\sigma}\partial_\mu \Gamma_{\sigma\lambda\nu} - g^{\rho\sigma}\partial_\nu \Gamma_{\sigma\lambda\mu} + \Gamma_{\sigma\lambda\nu}\partial_\mu g^{\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda\mu}\partial_\nu g^{\rho\sigma}\right) \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\kappa\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma_{\kappa\lambda\mu} + \Gamma_{\sigma\lambda\nu} g_{\kappa\rho}\partial_\mu g^{\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda\mu} g_{\kappa\rho}\partial_\nu g^{\rho\sigma} \\ &= \partial_\mu(\partial_\lambda g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\nu}) - \partial_\nu(\partial_\lambda g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\mu}) \\ &\quad - \partial_\mu g_{\kappa\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \\ &= (\partial_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu}) \\ &\quad - (\Gamma_{\kappa\rho\mu} + \Gamma_{\rho\kappa\mu})\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + (\Gamma_{\kappa\rho\nu} + \Gamma_{\rho\kappa\nu})\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = (\partial_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu}) + \Gamma_{\rho\kappa\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma_{\rho\kappa\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \tag{5.11}$$

Daraus ergeben sich direkt die algebraischen Symmetrien:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}. \tag{5.12}$$

Satz 5.5 (Bianchi-Identitäten)**.** *Für den Riemann–Christoffel-Krümmungstensor und den kovarianten Krümmungstensor gelten die algebraische (erste) und differentielle (zweite)* Bianchi-Identität*:*

$$R^{\sigma}_{[\lambda\mu\nu]} = 0 \Leftrightarrow R_{\kappa[\lambda\mu\nu]} = 0 \tag{5.13}$$

$$R^{\sigma}_{\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0 \Leftrightarrow R_{\kappa\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0. \tag{5.14}$$

Beweis. XXXX □

Definition 5.6 (Kretschmann-Skalar)**.** *Der Wert:*

$$K := R_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{5.15}$$

ist der Kretschmann-Skalar.

Der Kretschmann-Skalar hat eher geringe Bedeutung, da meist ein anderes Skalar für die Raumzeitkrümmung benutzt wird.

5.3 Ricci-Tensor und -Skalar

Definition 5.7 (Ricci-Tensor). *Die Kontraktion:*

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{5.16}$$

des Riemann–Christoffel-Krümmungstensors ist der Ricci-Tensor.

Definition 5.8 (Ricci-Skalar). *Der Wert:*

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{5.17}$$

ist das Ricci-Skalar.

Korollar 5.9 (Palatini-Identität für Lie-Ableitungen). *Für die Störung des Ricci-Tensors gilt die* Palatini-Identität*:*

$$\mathcal{L}_\xi R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\mathcal{L}_\xi \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\mathcal{L}_\xi \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \nabla_\sigma(\mathcal{L}_\xi \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - \nabla_\mu(\mathcal{L}_\xi \Gamma^\sigma_{\nu\sigma}). \tag{5.18}$$

Satz 5.10. *Aus der differentiellen Bianchi-Identität folgt:*

$$\nabla_\kappa R^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\partial^\lambda R. \tag{5.19}$$

Beweis. Mit der differentiellen Bianchi-Identität nach Gleichung (5.14), den Symmetrien des kovarianten Krümmungstensors nach Gleichung (5.12) und Gleichung (4.14) ist:

$$\begin{aligned} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu}(R_{\kappa\lambda\mu\nu;\xi} + R_{\kappa\lambda\nu\xi;\mu} + R_{\kappa\lambda\xi\mu;\nu}) &\overset{(5.12)}{=} \partial_\xi R - g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu}(R_{\lambda\kappa\nu\xi;\mu} + R_{\kappa\lambda\mu\xi;\nu}) \\ &\overset{(4.14)}{=} \partial_\xi R - g^{\kappa\mu} R_{\kappa\xi;\mu} - g^{\lambda\nu} R_{\lambda\xi;\nu} \\ &= \partial_\xi R - 2R^{\kappa}_{\xi;\kappa} \overset{!,(5.14)}{=} 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Durch die Anwendung von $g^{\xi\lambda}$ und Umstellung folgt die Behauptung. □

Der Satz lässt sich mithilfe von Gleichung (4.14) auch umschreiben zu:

$$\nabla_\kappa \left(R^{\kappa\lambda} - \frac{R}{2} g^{\kappa\lambda} \right) = \nabla_\kappa R^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \nabla_\kappa R = \nabla_\kappa R^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}\partial^\lambda R = 0. \tag{5.21}$$

5.4 Einstein-Tensor

Definition 5.11 (Einstein-Tensor). *Der Riemann-Tensor:*

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \tag{5.22}$$

wird Einstein-Tensor *genannt.*

Aufgrund von $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -R$ wird er auch *spurinverser Ricci-Tensor* genannt. Gleichung (5.21) wird nun kürzer zu:

$$\nabla_\kappa G^{\kappa\lambda} = 0. \tag{5.23}$$

5.5 Krümmungstensor in zwei Dimensionen

XXXX

5.6 Krümmungstensor in drei Dimensionen

XXXX

Kapitel 6

Raumzeitsymmetrien

6.1 Killing-Felder

Basierend auf Gleichung (4.23) wird definiert:

Definition 6.1 (Killing-Vektorfeld)**.** *Ein differenzierbares kovariantes Vektorfeld ξ, dass die* Killing-Gleichung*:*

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \propto \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0 \tag{6.1}$$

erfüllt, wird Killing-Vektorfeld *genannt.*

Lemma 6.2. *Ist der metrische Tensor unabhängig von der Koordinate x^λ, dann ist:*

$$\xi^\mu = \delta^\mu_\lambda \qquad bzw. \qquad \xi_\nu = g_{\lambda\nu} \tag{6.2}$$

mit λ fest, ein Killing-Vektorfeld.

Beweis. Mit Definition (2.1) ist:

$$\begin{aligned}\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \propto \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu &= \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi_\sigma \\ &= \partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\mu\kappa} + \partial_\kappa g_{\mu\nu} = 0.\end{aligned} \tag{6.3}$$

□

Einem Killing-Vektorfeld entspricht eine skalare Größe die entlang von Geodäten erhalten bleibt. Mit der Geodätengleichung (2.5) und der Killing-Gleichung (6.1) ist:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\xi_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) &= \partial_\nu\xi_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} + \xi_\sigma\frac{\mathrm{d}^2x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda^2} = \left(\partial_\nu\xi_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi_\sigma\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= \nabla_\nu\xi_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Satz 6.3. *Für ein Killing-Vektorfeld gilt:*

$$\xi_{\lambda;\nu;\mu} = -R^\sigma_{\mu\nu\lambda}\xi_\sigma. \tag{6.5}$$

Beweis. Mit der Killing-Gleichung (6.1), Gleichung (5.2) und der algebraischen Bianchi-Identität nach Gleichung (5.13) ist:

$$\begin{aligned}\xi_{\lambda;\nu;\mu} + \xi_{\mu;\lambda;\nu} + \xi_{\nu;\mu;\lambda} &\propto \left(\xi_{\lambda;\nu} - \xi_{\nu;\lambda}\right)_{;\mu} + \left(\xi_{\mu;\lambda} - \xi_{\lambda;\mu}\right)_{;\nu} + \left(\xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu}\right)_{;\lambda} \\ &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\xi_\lambda + [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]\xi_\mu + [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]\xi_\nu \\ &= (R^\sigma_{\mu\nu\lambda} + R^\sigma_{\nu\lambda\mu} + R^\sigma_{\lambda\mu\nu})\xi_\sigma = 0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Wieder mit Gleichung (5.2) ist damit:

$$\xi_{\lambda;\nu;\mu} = -\xi_{\mu;\lambda;\nu} - \xi_{\nu;\mu;\lambda} = -\xi_{\mu;\lambda;\nu} + \xi_{\mu;\nu;\lambda} = [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]\xi_\mu = -R^\sigma_{\mu\nu\lambda}\xi_\sigma. \tag{6.7}$$

□

Ist die Krümmung des Raumes, also der Riemann–Christoffel-Krümmungstensor, überall bekannt, lässt sich das Killing-Vektorfeld nur durch Kenntnis des Wertes und des Wertes der ersten kovarianten Differentiation an einer Stelle bestimmen. Die Antisymmetrie bei letzterem schränkt damit die Anzahl der linear unabhängigen Killing-Vektorfelder in einer N-dimensionalen Raumzeit auf:

$$N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \tag{6.8}$$

ein. Allgemeiner lässt sich definieren:

Definition 6.4 (Killing-Tensor)**.** *Ein kovarianter Tensor $T_{\nu_1\dots\nu_k}$, der die* Killing-Gleichung*:*

$$\nabla_{(\mu}T_{\nu_1\dots\nu_k)} = 0 \tag{6.9}$$

erfüllt, wird Killing-Tensor *genannt.*

6.2 Homothetische und konforme Felder

Definition 6.5 (Homothetisches Vektorfeld)**.** *Ein differenzierbares kovariantes Vektorfeld ξ, dass mit einer Konstante λ die* homothetische Gleichung*:*

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \propto \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = \lambda g_{\mu\nu} \tag{6.10}$$

erfüllt, wird homothetisches Vektorfeld *genannt.*

Ist die Konstante λ allgemeiner eine Raumzeitfunktion $\lambda(\mathbf{x})$ werden die Gleichung und das Vektorfeld auch *konform* genannt. Allgemeiner lässt sich definieren:

Definition 6.6 (Homothetisches Tensorfeld)**.** *Ein kovarianter Tensor $T_{\nu_1\dots\nu_k}$, der mit einer Konstante λ die* homothetische Gleichung*:*

$$\nabla_{(\mu}T_{\nu_1\dots\nu_k)} = \lambda T_{\nu_1\dots\nu_k} \tag{6.11}$$

erfüllt, wird homothetischer Tensor *genannt.*

Ist die Konstante λ allgemeiner eine Raumzeitfunktion $\lambda(\mathbf{x})$ werden die Gleichung und das Tensorfeld auch *konform* genannt.

6.3 Affine Felder

Definition 6.7 (Affines Vektorfeld)**.** *Ein differenzierbares kovariantes Vektorfeld ξ, dass die* affine Gleichung*:*

$$\nabla_\sigma[\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}] \propto \nabla_\sigma[\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}] = 0 \tag{6.12}$$

erfüllt, wird affines Vektorfeld *genannt.*

Allgemeiner lässt sich definieren:

Definition 6.8 (Affiner Tensor)**.** *Ein kovarianter Tensor $T_{\nu_1\dots\nu_k}$, der die* affine Gleichung*:*

$$\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}T_{\nu_1\dots\nu_k)} = 0 \tag{6.13}$$

erfüllt, wird affiner Tensor *genannt.*

6.4 Krümmungs-Kollineation (CC-Feld)

Definition 6.9 (Krümmungs-Kollineation)**.** *Ein differenzierbares kovariantes Vektorfeld ξ für das:*

$$\mathcal{L}_\xi R^\rho_{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{6.14}$$

wird Krümmungs-Kollineation *(oder* CC-Feld*) genannt.*

Satz 6.10. *Jedes affine Vektorfeld ist eine Krümmungs-Kollineation.*

Beweis. XXXX □

Teil II

Gesetze mit Gravitation

Kapitel 7

Kovarianzprinzip

Bisher formulierte Gesetze ohne Gravitation, also in einer flachen Raumzeit, können durch das *Kovarianzprinzip* auf Gesetze mit Gravitation, also in einer gekrümmten Raumzeit, verallgemeinert werden.

$$\eta_{\alpha\beta} \to g_{\mu\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \eta^{\alpha\beta} \to g^{\mu\nu} \tag{7.1}$$

$$\partial_\alpha \to \nabla_\mu \tag{7.2}$$

In Abwesenheit von Gravitation fallen der metrische Tensor und die kovariante Differentiation eben wieder auf den Minkowski-Tensor und die partielle Differentiation zurück.

Nun ergibt sich etwa für die Anwendung des d'Alembertoperators auf ein Skalarfeld nach dem Kovarianzprinzip:

$$\begin{aligned} -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\psi \to -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\psi = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi + g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\psi \\ = \Box\psi + \Gamma^\sigma\partial_\sigma\psi \end{aligned} \tag{7.3}$$

Da nach Satz (2.4) stets ein Koordinatensystem gefunden werden kann, für das $\Gamma^\sigma = 0$ ist in diesem die Klein-Gordon-Gleichung mit Gravitation wieder die ursprüngliche:

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} \partial_\rho\partial^\rho\psi &= \partial_\rho\left(g^{\rho\sigma}\partial_\sigma\psi\right) = g^{\rho\sigma}\partial_{\rho\sigma}\psi + (\partial_\rho g^{\rho\sigma})\partial_\sigma\psi \\ &= \Box_\partial\psi - (\Gamma^\sigma + g^{\sigma\tau}\Gamma^\rho_{\rho\tau})\partial_\sigma\psi = \Box_\nabla\psi - \Gamma^\rho_{\rho\tau}\partial^\tau\psi \end{aligned} \tag{7.5}$$

Kapitel 8

Allgemein relativistische Hydrodynamik

Kapitel 9

Allgemein relativistische Elektrodynamik

Korollar 9.1. *Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld wird zu:*

$$m\frac{\mathrm{D}u^\beta}{\mathrm{d}\tau} = m\left(\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\beta_{\gamma\delta}u^\gamma u^\delta\right) = qF_{\alpha\beta}u^\alpha \tag{9.1}$$

Satz 9.2 (Coulomb–Ampére-Gesetz)**.** *Das Coulomb–Ampére-Gesetz wird zu:*

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}j^\nu. \tag{9.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}F^{\mu\sigma}\\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}^{-1}\partial_\sigma\sqrt{-g}F^{\sigma\nu}\\ &= \sqrt{-g}^{-1}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = j^\nu\end{aligned} \tag{9.3}$$

□

Satz 9.3 (Gauß–Faraday-Gesetz)**.** *Das Gauß–Faraday-Gesetz wird zu:*

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \tag{9.4}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}^{-1}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}^{-1}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}(\partial_\lambda F_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}F_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}F_{\mu\sigma})\\ &= \sqrt{-g}^{-1}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{9.5}$$

wobei die vorletzte Gleichheit folgt, da die Christoffelsymbole zweiter Art symmetrisch in ihren unteren beiden Indizes, der Epsilontensor jedoch antisymmetrisch in diesen ist. □

Kapitel 10

Spinpräzession

Nicht nur die Translationsbewegung eines Teilchens, sondern auch dessen Eigendrehbewegung oder *Spin* wird vom Gravitationsfeld sowie dessen Beschleunigungen beeinflusst. Dies wird als *Spinpräzession* bezeichnet.

10.1 Geodätische Präzession

Die *geodätische Präzession* ist die Präzession eines Teilchens im Gravitationsfeld. Betrachtet wird ein Teilchen mit einem konstanten Spin, also für das:

$$\frac{\mathrm{d}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{10.1}$$

Die Anwendung des Kovarianzprinzips führt auf die der Geodätengleichung (2.5) ähnliche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{D}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu s^\nu = 0 \tag{10.2}$$

Die entsprechende kovariante Form der Gleichung ist:

$$\frac{\mathrm{D}s_\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}s_\nu}{\mathrm{d}\tau} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu s_\sigma = 0 \tag{10.3}$$

Der Betrag des Spins bleibt bei der Spinpräzession konstant, da:

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau} = s_\sigma \frac{\mathrm{d}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}s_\nu}{\mathrm{d}\tau} s^\nu = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu s^\nu s_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu s^\nu s_\sigma = 0 \tag{10.4}$$

Oder kürzer:

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{D}s^2}{\mathrm{d}\tau} = s_\sigma \frac{\mathrm{D}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{D}s_\nu}{\mathrm{d}\tau} s^\nu = 0 \tag{10.5}$$

10.2 Thomas-Präzession

Die *Thomas-Präzession* ist die Präzession eines beschleunigten Teilchens ohne Gravitationsfeld.

$$\frac{\mathrm{d}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}u^\kappa}{\mathrm{d}\tau} s_\kappa u^\sigma \tag{10.6}$$

10.3 Fermi-Transport

Der *Fermi-Transport* ist die Präzession eines beschleunigten Teilchens im Gravitationsfeld. Sie folgt aus der Anwendung des Kovarianzprinzips auf die Thomas-Präzession:

$$\frac{\mathrm{D}s^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}u^\kappa}{\mathrm{d}\tau}s_\kappa u^\sigma \tag{10.7}$$

Oder ausformuliert:

$$\frac{\mathrm{d}s^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}u^\mu s^\nu = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}u^\kappa}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right)s_\kappa u^\sigma \tag{10.8}$$

Teil III

Quellen der Gravitation

Kapitel 11

Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}g_{\mu\nu}\right) \tag{11.1}$$

Der Laue-Skalar verschwindet aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors:

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\nu\lambda}F_{\lambda\nu} + F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\right) = 0 \tag{11.2}$$

$$T_{00} = \rho c^2 \tag{11.3}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{11.4}$$

Satz 11.1. *Aus der Energie-Impuls-Erhaltung $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt mit einem beliebigen Killing-Vektorfeld ξ die Kontinuitätsgleichung:*

$$\partial_\mu[\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu] = 0 \tag{11.5}$$

Beweis. Mit Gleichung (4.8), der Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors und der Killing-Gleichung (6.1) ist:

$$\begin{aligned}\partial_\mu[\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\nu] &= \sqrt{-g}\nabla_\mu(T^{\mu\nu}\xi_\nu) = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\mu\nu}(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\mu\xi_\nu) = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0\end{aligned} \tag{11.6}$$

□

Definition 11.2 (Laue-Skalar)**.**

$$T := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{11.7}$$

11.1 Materie-Kollineation (MC-Feld)

Definition 11.3 (Materie-Kollineation)**.** *Ein kovariantes differenzierbares Vektorfeld ξ für das:*

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\sigma\partial_\sigma T_{\mu\nu} + T_{\sigma\nu}\partial_\mu\xi^\sigma + T_{\mu\sigma}\partial_\nu\xi^\sigma = 0 \tag{11.8}$$

wird Materie-Kollineation *(oder* MC-Feld*) genannt.*

Kapitel 12

Pseudotensoren

12.1 Landau–Lifschitz-Pseudotensor

Definition 12.1 (Landau–Lifschitz-Pseudotensor)**.** *XXXX*

$$t_{LL}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\kappa}(G^{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{\kappa g}\partial_{\kappa\lambda}(-g(g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu} - g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}) \tag{12.1}$$

12.2 Einstein-Pseudotensor

Definition 12.2 (Einstein-Pseudotensor)**.** *XXXX*

$$XXXX \tag{12.2}$$

Teil IV

Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen

Kapitel 13

Newtonscher Grenzfall der Feldgleichung

Die Einsteinschen Feldgleichungen sind gekoppelte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und beschreiben wie die Energie-Impuls-Verteilung die Raumzeit krümmt. Sie können nicht einfach hergeleitet werden, sondern werden durch plausible Annahmen und Forderungen konstuiert. Zunächst muss die Newtonsche Feldgleichung für den nichtrelativistischen Grenzfall enthalten sein. Diese ist mit den Gleichungen (3.5) und (11.3):

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \Rightarrow \Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} = \kappa T_{00} \tag{13.1}$$

Wobei als Abkürzung eingeführt wurde:

Definition 13.1 (Einsteinsche Gravitationskonstante)**.** *Der Wert:*

$$\kappa := \frac{8\pi G}{c^4} \tag{13.2}$$

ist die Einsteinsche Gravitationskonstante.

Die lorentzinvariante Verallgemeinerung führt auf:

$$\Box g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \tag{13.3}$$

Die Anwendung des Kovarianzprinzips führt auf keine sinnvolle kovariante Feldgleichung, da nach Gleichung (4.13) die kovariante Differentiation des metrischen Tensors stets null wird:

$$\Box g_{\alpha\beta} \to -g^{\kappa\lambda}\nabla_\kappa\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{13.4}$$

Zudem muss noch der Energie-Impuls-Tensor $t^{\text{grav}}_{\alpha\beta}$ des Gravitationsfeldes selbst berücksichtigt werden, denn auch dieses enthält Energie und ist damit unter anderem die eigene Quelle. Die Struktur des Energie-Impuls-Tensors wird jedoch üblicherweise aus einer bereits bestehenden Theorie abgeleitet, wie etwa bei der Elektrodynamik, und ist daher für das Gravitationsfeld vollkommen unbekannt:

$$\Box g_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} + t^{\text{grav}}_{\alpha\beta}) \tag{13.5}$$

Wird dieser auf die linke Seite gebracht und die kovariante Verallgemeinerung von dieser als neuer Riemann-Tensor $G_{\mu\nu}$ bezeichnet, ergibt sich folgende provisorische Struktur der Feldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{13.6}$$

Dieser Riemann-Tensor ist nun vollkommen unbekannt. Es können jedoch folgende Forderungen aufgestellt werden:

I.) $G_{\mu\nu}$ ist symmetrisch, da $T_{\mu\nu}$ symmetrisch ist

II.) $G_{\mu\nu}$ wird aus den ersten und zweiten Differentiationen des metrischen Tensors gebildet und ist quadratisch in den ersten und linear in den zweiten.

III.) Aufgrund der Energie-Impuls-Erhaltung nach der Koninuitätsgleichung (11.4) und der Übertragung durch die Feldgleichung (XXXX) gilt:

$$\nabla_\kappa G^{\kappa\lambda} = 0 \tag{13.7}$$

IV.) Für kleine Geschwindigkeiten und statische schwache Felder muss sich der Newtonsche Grenzfall ergeben:

$$G_{00} \simeq \Delta g_{00} \tag{13.8}$$

Mit den ersten beiden Forderungen lässt sich zeigen, dass der Tensor die Form:

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} \tag{13.9}$$

haben muss, wobei a und b vorerst unbekannte Konstanten sind. Die Gleichungen (13.7) und (13.8) legen diese nun fest. Aus Gleichung (**??**) folgt sofort, dass $b = -a/2$ sein muss, also:

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right) \tag{13.10}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall dominiert die T_{00}-Komponente der ruhenden Materie und damit die G_{00}-Komponente jeweils gegenüber den anderen Komponenten des Tensors. Nun gilt:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R \simeq g^{00}G_{00} \tag{13.11}$$

Damit ist:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{R}{2}g_{00} = R_{00} + \frac{1}{2}\underbrace{g_{00}g^{00}}_{\approx 1}G_{00} \Rightarrow G_{00} \simeq 2R_{00} \tag{13.12}$$

Für statische Felder verschwinden sämtliche Zeitdifferentiationen ∂_0 des metrischen Tensors und für schwache Felder können die $\Gamma\Gamma$-Terme des Ricci-Tensors vernachlässigt werden, sowie $g^{ij} \simeq \eta^{ij}$ genähert werden, mit $R_{00} \simeq -\partial_i\Gamma^i_{00}$ ist:

$$G_{00} \simeq -2\partial_i\Gamma^i_{00} = \partial_i\left(g^{ij}\partial_j g_{00}\right) = \eta^{ij}\partial_i\partial_j g_{00} = -\Delta g_{00} \tag{13.13}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{13.14}$$

Damit ist $a = -1$, aber dieses wird meist auf die rechte Seite des Energie-Impuls-Tensors geschrieben. Nun ist die Struktur von $G_{\mu\nu}$ bekannt:

Die finalen *Einsteinschen Feldgleichungen* haben nun die Form:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{13.15}$$

Die Spurbildung durch Anwendung von $g^{\mu\nu}$ ergibt einen einfachen Zusammenhang zwischen Ricci- und Laue-Skalar:

$$R = \kappa T \tag{13.16}$$

Wird dieser wiederrum eingesetzt ergibt sich eine äquivalente Formulierung der Feldgleichungen mit gespiegelter Struktur:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) := -\kappa T^*_{\mu\nu} \tag{13.17}$$

Durch die Konstruktion des Einstein-Tensors mit $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ist die Energie-Impuls-Erhaltung (XXXX) bereits in den Feldgleichungen enthalten.

Aufgrund der Symmetrie der Feldgleichungen bestehen diese statt aus sechszehn nur aus zehn algebraisch unabhängigen Gleichungen, wobei wegen $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ nur sechs davon funktional unabhängig sind. Der Verlust von vier Freiheitsgraden entspricht der Wahl von vier Koordinatentransformationen, die eine Lösung $g_{\mu\nu}$ in eine andere Lösung $g'_{\mu\nu}$ überführt.

13.1 Vakuumfeldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum, also für einen verschwindenden Energie-Impuls-Tensor, womit der Laue-Skalar T und nach Gleichung (13.16) auch der Ricci-Skalar R null sind, werden *Vakuumfeldgleichungen* genannt:

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{13.18}$$

Die beschriebene Raumzeit ist damit eine Ricci-Mannigfaltigkeit. Die Lösungen der Vakuumfeldgleichungen werden *Vakuumlösungen* genannt. Der Minkowski-Tensor der flachen Raumzeit ist trivialerweise eine gültige Lösung, sofern die Vakuumfeldgleichungen überall in der Raumzeit gelten.

13.2 Einstein–Maxwell-Gleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen im mit elektromagnetischen Feldern gefüllten Vakuum, also mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor nach Gleichung (**??**), dessen Laue-Skalar T nach Gleichung (XXXX) verschwindet, ebenso wie der Ricci-Skalar R nach Gleichung (13.16), werden *Einstein–Maxwell-Gleichungen* (oder *Elektrovakuumfeldgleichungen*) genannt:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\mu_0} \left(F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \right). \tag{13.19}$$

Die Lösungen der Einstein–Maxwell-Gleichungen werden *Einstein–Maxwell-Lösungen* genannt.

13.3 Lambdavakuumfeldgleichungen

Die Vakuumfeldgleichungen mit dem kosmologischen Term werden *Lambdavakuumfeldgleichungen* genannt. Mit $T_{\mu\nu} = 0$ und $T = 0$ in Gleichung (XXXX) ist diese:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{13.20}$$

Die beschriebene Raumzeit ist damit eine Einstein-Mannigfaltigkeit. Die Lösungen der Lambdavakuumgleichungen werden *Lambdavakuumlösungen* genannt.

Kapitel 14

Elektromagnetischer Feldstärketensor

Definition 14.1 (Elektromagnetischer Feldstärketensor)**.** *Der elektromagnetische Feldstärketensor ist definiert als:*

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

Definition 14.2 (Dualer elektromagnetischer Feldstärketensor)**.** *Der duale elektromagnetische Feldstärketensor ist definiert als:*

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich mit dem Feldstärketensor kompakter ausdrücken. Die vier homogenen Gleichungen (zweite und dritte) sowie die vier inhomogenen Gleichungen (erste und vierte) werden zu:

$$\partial^{[\lambda}F^{\mu\nu]} = 0 \text{ bzw. } \partial_\mu\widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{14.3}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{14.4}$$

Durch die Anwendung der partiellen Differentiation ∂_ν folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \tag{14.5}$$

In einer gekrümmten Raumzeit werden die partiellen Differentiation verallgemeinert durch die gaußsche kovariante Differentiation:

$$\nabla^{[\lambda}F^{\mu\nu]} = 0 \text{ bzw. } \nabla_\mu\widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{14.6}$$

Durch die Anwendung der gaußschen kovarianten Differentiation ∇_ν folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla_\nu j^\nu = 0 \tag{14.7}$$

Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist:

$$T^{\alpha\beta} = F^{\alpha\gamma}F^\beta_\gamma + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \tag{14.8}$$

Kapitel 15

Einstein–Hilbert-Wirkung

Ähnlich wie bereits die Geodätengleichung lassen sich auch die Einsteinschen Feldgleichungen aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip bzw. der Euler-Lagrange-Gleichung herleiten.

Satz 15.1 (Einstein–Hilbert-Wirkung)**.** *Die Einsteinschen Feldgleichungen minimieren die* Einstein–Hilbert–Wirkung*:*

$$S_{\mathrm{EH}} := \frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \right) \tag{15.1}$$

Dabei ist $\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}$ die Lagrange-Dichte der Materie für die:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{15.2}$$

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \delta \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{\delta R}{2\kappa} + \delta \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \right) \tag{15.3}$$

Definition 15.2 (Gibbons–Hawking–York-Randterm)**.** *Für eine Raumzeit mit Rand muss zusätzlich die* Gibbons–Hawking–York-Term*:*

$$S_{\mathrm{GHY}} := \frac{1}{\kappa} \int_{\partial M} \mathrm{d}^3y \, \epsilon \sqrt{-h} K \tag{15.4}$$

berücksichtigt werden.

Teil V

Singuläre exakte Lösungen

Kapitel 16

Lösungsansätze

16.1 Standardform und isotrope Form

Der Minkowski-Tensor im kartesischen Koordinatensystem (t, x, y, z) wird durch Transformation auf Kugelkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ zu:

$$\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\left(1, -1, -r^2, -r^2 \sin(\vartheta)^2\right) \tag{16.1}$$

Definition 16.1 (Standardform)**.** *Der Lösungsansatz:*

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\left(A(r), -B(r), -r^2, -r^2 \sin(\vartheta)^2\right) \tag{16.2}$$

für isotrope statische Gravitationsfelder wird Standardform *genannt.*

Die Koeffizienten des Ricci-Tensors werden zu:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} \tag{16.3}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} \tag{16.4}$$

$$R_{22} = -1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{B} \tag{16.5}$$

$$R_{33} = R_{22} \sin(\vartheta)^2 \tag{16.6}$$

Alle Nichtdiagonalelemente sind null.

Die Geodätengleichung (2.5) wird in der Standardform zu:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}\tau^2} = -\ln(A)' \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \tag{16.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{A'}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{B'}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{r}{B}\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{r}{B}\sin(\vartheta)^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{16.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vartheta}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau} - \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{16.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} - 2\cot(\vartheta)\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} \tag{16.10}$$

Gleichung (16.9) kann durch:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \tag{16.11}$$

gelöst werden. Die Bahn bleibt somit stets in einer Ebene.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}\tau^2} = -\ln(A)' \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \tag{16.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{16.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} \tag{16.14}$$

Kapitel 17

Koordinatentransformationen

17.1 Schwarzschild-Koordinaten

Definition 17.1 (Schwarzschild-Koordinaten). *XXXX*

17.2 Lemaître-Koordinaten

Definition 17.2 (Lemaître-Koordinaten). *XXXX*

17.3 Kerr–Schild-Koordinaten

Definition 17.3 (Kerr–Schild-Koordinaten). *XXXX*

17.4 Kruskal–Szekeres-Koordinaten

Kruskal–Szekeres-Koordinaten, entwickelt von Martin Kruskal und George Szekeres in den 1950er Jahren, vereinfachen die Beschreibung von Schwarzen Löchern.

Definition 17.4 (Kruskal–Szekeres-Koordinaten).

$$\widetilde{ct} = \left|1 - \frac{r}{r_\mathrm{S}}\right|^{1/2} e^{\frac{r}{2r_\mathrm{S}}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_\mathrm{S}}\right) \tag{17.1}$$

$$\widetilde{r} = \left|1 - \frac{r}{r_\mathrm{S}}\right|^{1/2} e^{\frac{r}{2r_\mathrm{S}}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_\mathrm{S}}\right) \tag{17.2}$$

$$ct = 2r_\mathrm{S} \operatorname{artanh}\left(\frac{\widetilde{r}}{\widetilde{ct}}\right) \tag{17.3}$$

$$r = r_\mathrm{S}\left(1 + W\left(\frac{c^2\widetilde{t}^2 + \widetilde{r}^2}{e}\right)\right) \tag{17.4}$$

Kapitel 18

Schwarzschild-Metrik

Die *Schwarzschild-Metrik*, entwickelt von Karl Schwarzschild und unabhängig von Johann Droste im Jahr 1916, war die erste exakte und ist die einfachste nichttriviale Lösung der Vakuumfeldgleichungen und beschreibt das statische Gravitationsfeld einer ungeladenen, nicht rotierenden, radialsymmetrischen und zeitunabhängigen Massenverteilung[2].

18.1 Äußere Lösung

Da der Energie-Impuls-Tensor außerhalb der Massenverteilung verschwindet müssen die Vakuumfeldgleichungen (13.18) betrachtet werden. Der Ansatz für die Schwarzschild-Metrik in Kugelkoordinaten sei die Standardform nach Definition (16.1). Aus Gleichung (16.3) und (16.4) folgt:

$$\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} = -\frac{1}{rB}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(AB)' = 0 \Leftrightarrow AB = \text{const.} \tag{18.1}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{18.2}$$

Für $M \to 0$ führt diese auf die Minkowski-Metrik zurück.

18.2 Ereignishorizont

Falls ein Schwarzes Loch beschrieben wird divergiert die Schwarzschild-Metrik für $r \to 0$. Zudem wird sie singulär für:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0 \tag{18.3}$$

Das führt auf:

Definition 18.1 (Gravitationsradius)**.** *Der Wert:*

$$r_{\mathrm{G}} := \frac{GM}{c^2} \tag{18.4}$$

ist der Gravitationsradius *eines Körpers mit Masse M.*

Definition 18.2 (Schwarzschild-Radius)**.** *Der Wert:*

$$r_{\mathrm{S}} := 2r_{\mathrm{G}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{18.5}$$

ist der Schwarzschild-Radius *eines Körpers mit Masse M.*

Die Singularität am Ereignishorizont lässt sich durch eine Transformation der Schwarzschild-Metrik auf Kruskal–Szekeres-Koordinaten beheben und ist daher lediglich eine Koorinatensingularität.

18.3 Birkhoff-Theorem

Theorem 18.3 (Birkhoff-Theorem)**.** *Eine sphärisch symmetrische Lösung der Vakuumfeldgleichungen (13.18) ist statisch und die Schwarzschildlösung.*

Das Birkhoff-Theorem ist die relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Schalentheorems. Insbesondere zeigt sie, dass radiale Bewegungen der Materie die Schwarzschild-Metrik im Außenraum unverändert lassen und diese Bewegungen damit insbesondere keine Gravitationswellen verursachen.

Beweis. XXXX □

18.4 Innere Lösung

Die innere Schwarzschild-Metrik beschreibt das Gravitationsfeld im Inneren eines Sterns aus einer idealen Flüssigkeit, also mit dem Energie-Impuls-Tensor nach Gleichung (XXXX). Betrachtet wird ein statischer Stern mit verschwindenden räumlichen Geschwindigkeitskomponenten, also $u^i = 0$[1].

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{00}\left(u^0\right)^2 = A\left(u^0\right)^2 \overset{!}{=} c^2 \Rightarrow u^0 = \sqrt{A}^{-1}c \tag{18.6}$$

Zudem folgt:

$$u_0 = g_{0\mu}u^\mu = g_{00}u^0 = Au^0 = \sqrt{A}c \tag{18.7}$$

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\rho c^2 A, PB, Pr^2, Pr^2\sin(\vartheta)^2\right) \tag{18.8}$$

$$T^*_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\left((\rho c^2 + 3P)A, (\rho c^2 - P)B, (\rho c^2 - P)r^2, (\rho c^2 - P)r^2\sin(\vartheta)^2\right) \tag{18.9}$$

Die Feldgleichungen (XXXX) mit

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{A'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} \qquad = -\kappa T^*_{00} = -\frac{\kappa}{2}(\rho c^2 + 3P)A \tag{18.10}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} \qquad = -\kappa T^*_{11} = -\frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - P)B \tag{18.11}$$

$$R_{22} = -1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{B} \qquad = -\kappa T^*_{22} = -\frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - P)r^2 \tag{18.12}$$

Da sowohl $R_{33} = R_{22}\sin(\vartheta)^2$ nach Gleichung (16.6), als auch $T^*_{33} = T^*_{22}\sin(\vartheta)^2$ nach Gleichung (XXXX) ist die Gleichung der 33-Komponente äquivalent zu der der 22-Komponente.

Es folgt aus den drei Gleichungen:

$$\frac{R_{00}}{2A} + \frac{R_{11}}{2B} + \frac{R_{22}}{r^2} = -\frac{B'}{Br^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -\kappa\rho c^2 \tag{18.13}$$

Multipliziert mit r^2 folgt durch Umstellung:

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - \kappa c^2 \rho r^2 \Rightarrow A(r) = \left(1 - \frac{\kappa c^2}{4\pi r}\mathcal{M}(r)\right)^{-1} = \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \tag{18.14}$$

Das ergibt die *Toleman–Oppenheimer–Volkoff-Gleichung*:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\mathcal{M}\rho}{r^2}\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M}c^2}\right)\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}\right) \tag{18.15}$$

Die hinteren drei Faktoren nähern sich dabei im nichtrelativistischen Grenzfall alle jeweils eins an, was auf Gleichung (XXXX) zurückführt.

Kapitel 19

Reissner–Nordstrøm-Metrik

Die *Reissner–Nordstrøm-Metrik*, gefunden von Hans Reissner und Gunnar Nordstrøm in den Jahren 1916 bis 1921, beschreibt das statische Gravitationsfeld einer geladenen, nicht rotierenden, radialsymmetrischen und zeitunabhängigen Massen- und Ladungsverteilung. Sie verallgemeinert die Schwarzschild-Metrik.

19.1 Äußere Lösung

Da der Energie-Impuls-Tensor außerhalb der Massenverteilung aufgrund des elektrischen Feldes gerade dem Feldstärketensor nach Gleichung (XXXX) entspricht, müssen die Einstein–Maxwell-Gleichungen (13.19) betrachtet werden. Der Ansatz für die Reissner–Nordstrøm-Metrik in Kugelkoordinaten sei die Standardform nach Definition (16.1):

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gk_\mathrm{C}Q^2}{c^4 r^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gk_\mathrm{C}Q^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{19.1}$$

Für $Q \to 0$ führt diese auf die Schwarzschild-Metrik zurück.

19.2 Ladungsinduzierte Antigravitation

Der Beitrag der elektrischen Ladung zum Gravitationsfeld ist abstoßend, der Abstand unter dem der antigravitative Beitrag, auch *Reissner–Nordstrøm-Repulsion*, überwiegt ist gegeben durch:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gk_\mathrm{C}Q^2}{c^4 r^2}\right) = \frac{2GM}{c^2 r^2} - \frac{2Gk_\mathrm{C}Q^2}{c^4 r^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r = \frac{k_\mathrm{C}Q^2}{Mc^2} \tag{19.2}$$

Für ein Elektron ist dies gerade der klassische Elektronenradius.

19.3 Cauchy-Horizonte und -Flächen

Falls ein Schwarzes Loch beschrieben wird divergiert die Reissner–Nordstrøm-Metrik für $r \to 0$. Zudem wird sie singulär für:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gk_C Q^2}{c^4 r^2} = 0 \tag{19.3}$$

Dies führt auf:

Definition 19.1 (Cauchy-Horizonte)**.** *Die beiden Radien:*

$$r_{\pm} := \frac{1}{2}\left(r_{\mathrm{S}} \pm \sqrt{r_{\mathrm{S}}^2 - 4r_{\mathrm{Q}}^2}\right) \tag{19.4}$$

sind die Cauchy-Horizonte *des Schwarzen Lochs.*

Dabei ist der äußere Cauchy-Horizont r_+, der sich zwischen dem Schwarzschild- und Gravitationsradius befindet, der Ereignishorizont des Schwarzen Loches. Der innere Cauchy-Horizont r_- befindet sich dagegen im Schwarzen Loch.

Für $|Q| = M$ fallen die beiden Cauchy-Horizonte am Gravitationsradius zusammen, für $|Q| > M$ werden sie dagegen imaginär und die Singularität würde nicht von einem Ereignishorizont umschlossen werden. Dies wird als *nackte Singularität* bezeichnet. Dies wäre etwa für ein Schwarzes Loch mit Masse und Ladung eines Elektrons der Fall.

Da die elektrische Ladung Schwarzer Löcher durch elektrische Ströme in der Akkretionsscheibe schnell neutralisiert wird, werden geladene Schwarze Löcher in der Astrophysik eher selten betrachtet.

Die Singularität am Ereignishorizont lässt sich durch eine Transformation der Reissner–Nordstrøm-Metrik auf Kruskal–Szekeres-Koordinaten beheben und ist daher lediglich eine Koorinatensingularität:

19.4 Innere Lösung

XXXX

Kapitel 20

Spezielle Koordinatensysteme

20.1 Eddington–Finkelstein-Koordinaten

Definition 20.1 (Eddington–Finkelstein-Koordinaten)**.** *XXXX*

$$\widetilde{r} := r - r_{\mathrm{S}} \ln \left| \frac{r}{r_{\mathrm{S}}} - 1 \right| \tag{20.1}$$

XXXX

20.2 Gullstrand–Painlevé-Koordinaten

Definition 20.2 (Gullstrand–Painlevé-Koordinaten)**.** *XXXX*

$$\widetilde{t} = t - a(r) \tag{20.2}$$

XXXX

20.3 Boyer–Linquist-Koordinaten

Boyer–Linquist-Koordinaten, entwickelt von Robert Boyer und Richard Linquist im Jahr 1966, vereinfachen die Beschreibung von rotierenden Schwarzen Löchern und verallgemeinern die Kugelkoordinaten.

Definition 20.3 (Boyer–Linquist-Koordinaten)**.**

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \cos\varphi \tag{20.3}$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \sin\varphi \tag{20.4}$$

$$z = r \cos\vartheta \tag{20.5}$$

Kapitel 21

Kerr-Metrik

Die *Kerr-Metrik*, gefunden von Roy Kerr im Jahr 1963, beschreibt das statische Gravitationsfeld eines ungeladenen und rotierenden Schwarzen Lochs, sie eignet sich nicht für ausgedehnte Körper. Sie verallgemeinert die Schwarzschild-Metrik.

Die Koordinatensingularität am Ereignishorizont kann durch eine Transformation auf Kerr–Schild-Koordinaten vermieden werden.

Im Jahr 2017 wurde eine innere Lösung für die Kerr-Metrik gefunden[4].

21.1 Ereignishorizonte und Ergosphäre

Kapitel 22

Kerr–Newman-Metrik

Die *Kerr–Newman-Metrik*, gefunden von Ezra Newman im Jahr 1965, beschreibt das statischen Gravitationsfeld eines geladenen und rotierenden Schwarzen Lochs, sie eignet sich nicht für ausgedehnte Körper. Sie verallgemeinert die Reissner–Nordstrøm- und Kerr-Metrik.

Die Koordinatensingularität am Ereignishorizont kann durch eine Transformation auf Kerr–Schild-Koordinaten vermieden werden.

22.1 Ereignishorizonte und Ergosphäre

Kapitel 23

Penrose-Prozess

Der *Penrose-Prozess*, von Roger Penrose im Jahr 1969 entwickelt, ist eine Möglichkeit die Rotationsenergie eines Schwarzen Loches in dessen Ergosphäre zu extrahieren.

Kapitel 24

deSitter- und Anti-deSitter-Metriken

Die *deSitter-Metriken* mit $\Lambda > 0$ und die *Anti-deSitter-Metriken* mit $\Lambda < 0$, gefunden von XXXX im Jahr XXXX, verallgemeinern die Schwarzschild-, Reissner–Nordstrøm-, Kerr- und Kerr–Newman-Metrik jeweils für eine nichtverschwindende kosmologische Konstante Λ. Die Schwarzschild–deSitter-Metrik war dabei die erste exakte und ist die einfachste nichttriviale Lösung der Lambdavakuumgleichungen (13.20).

24.1 der Schwarzschild-Metrik

Die *Schwarzschild–deSitter-Metrik* (SdS-Metrik) und die *Schwarzschild-Anti-deSitter-Metrik* (SAdS-Metrik) sind gegeben durch:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{24.1}$$

24.2 der Reissner–Nordstrøm-Metrik

Die *Reissner–Nordstrøm–deSitter-Metrik* (RNdS-Metrik) und die *Reissner–Nordstrøm-Anti-deSitter-Metrik* (RNAdS-Metrik) sind gegeben durch:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} + \frac{r_\mathrm{Q}^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} + \frac{r_\mathrm{Q}^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{24.2}$$

24.3 der Kerr-Metrik

Die *Kerr–deSitter-Metrik* (KdS-Metrik) und die *Kerr-Anti-deSitter-Metrik* (KAdS-Metrik) sind gegeben durch:

Die KAdS-Metrik hat keinen Ereignishorizont.

24.4 der Kerr–Newman-Metrik

Die *Kerr–Newman–deSitter-Metrik* (KNdS-Metrik) und die *Kerr–Newman-Anti-deSitter-Metrik* (KNAdS-Metrik) sind gegeben durch:

Die KNAdS-Metrik hat keinen Ereignishorizont.

Kapitel 25

Abbassi–Gharanfoli-Metrik

Die *Abbassi–Gharanfoli-Metrik*, gefunden von Amir Abbassi und Sohelia Gharanfoli im Jahr 1999, ist eine nichtstatische Schwarzschild–deSitter-Metrik

Kapitel 26

Schwarzschild–Tangherlini-Metrik

Die *Schwarzschild–Tangherlini-Metrik*, gefunden von Karl Schwarzschild und Frank Tangherlini im Jahr XXXX, verallgemeinert die Schwarzschild-Metrik auf höhere Dimensionen D.

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \left(\frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{D-3}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \left(\frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{D-3}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{26.1}$$

Für $D > 4$ ergeben sich in dieser Metrik keine stabilen Orbits.

Kapitel 27

Vaidya-Metrik

Die *Vaidya-Metrik*, gefunden von XXX im Jahr XXX, beschreibt das Gravitationsfeld einer ungeladenen, nicht rotierenden, radialsymmetrischen und zeitabhängigen Massenverteilung, wie es etwa durch die Kernfusion bei Sternen oder der Hawking-Strahlung bei Schwarzen Löchern der Fall ist. Sie verallgemeinert die Schwarzschild-Metrik.

Kapitel 28

Vaidya–Bonner-Metrik

Die *Vaidya–Bonner-Metrik*, gefunden von XXXX im Jahr XXXX, beschreibt das Gravitationsfeld einer geladenen, nicht rotierenden, radialsymmetrischen und zeitabhängigen Massen- und Ladungsverteilung. Sie verallgemeinert die Vaidya- und Reissner–Nordstrøm-Metrik.

Kapitel 29

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik (FLRW-Metrik)

Die Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik (FLRW-Metrik) wird vereinfacht auch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right) \\ &= c^2\mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2\sin(\vartheta)^2\mathrm{d}\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{29.1}$$

Lemma 29.1. *Der Ricci-Skalar der Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik ist gegeben durch:*

$$R = \frac{6}{c^2a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2\right). \tag{29.2}$$

Beweis. XXXX □

29.1 Friedmann-Gleichungen

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{29.3}$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho - \frac{4\pi G}{c^2}P + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{29.4}$$

- Für $k = -1$ ist die Energiedichte des Universums kleiner als die kritische Energiedichte und dessen Krümmung negativ. Ein solches Universum wird „hyperbolisch“ genannt, da hyperbolische Räume eine negative Krümmung haben.
- Für $k = 0$ ist die Energiedichte des Universums genau gleich der kritischen Energiedichte und daher nicht gekrümmt. Ein solches Universum wird „flach“ genannt.
- Für $k = 1$ ist die Energiedichte des Universums größer als die kritische Energiedichte und dessen Krümmung positiv. Ein solches Universum wird „sphärisch“ genannt, da Sphären eine positive Krümmung haben.

Die beiden Friedmann-Gleichungen (29.3) und (29.4) enthalten drei unbekannte Funktionen, diese sind der Skalenfaktor $a(t)$, die Dichte $\rho(t)$ und der Druck $P(t)$. Zur vollständigen Beschreibung ist daher eine weitere Gleichung notwendig.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho a^3\right) = \dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} = \frac{3}{4\pi G}\left(H\dot{H}a^3 - kc^2\dot{a}\right) \tag{29.5}$$

Definition 29.2 (Hubble-Parameter)**.** *Es ist:*

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{29.6}$$

der Hubble-Parameter*.*

Es sei $H_0 := H(t_0) = \dot{a}(t_0)$.

Definition 29.3 (Kritische Dichte)**.** *Es ist:*

$$\rho_{\text{crit}}(t) = \frac{3}{8\pi G} H(t)^2 \tag{29.7}$$

die kritische Dichte*.*

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \tag{29.8}$$

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \tag{29.9}$$

$$\rho_{\text{crit}}(t) = \rho(t) - \frac{3kc^2}{8\pi G a^2} + \rho_\Lambda \tag{29.10}$$

Kapitel 30

Spin-Flip bei Schwarzen Löchern

Betrachtet wird ein Binärsystem mit Bahndrehimpuls $\mathbf{L}$ aus zwei rotierenden Schwarzer Löchern mit jeweiligen Drehimpulsen $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. Bei der Verschmelzung entsteht ein rotierenden Schwarzes Loch mit Drehimpuls $\mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.

Kapitel 31

ADM-Formalismus

Kapitel 32

Alcubierre-Metrik

Teil VI

Kosmologische exakte Lösungen

Kapitel 33

Gödel-Metrik

Die *Gödel-Metrik*, gefunden von Kurt Gödel im Jahr 1949, beschreibt ein rotierendes, geschlossenes, stationäres und homogenes Universum mit negativer kosmologischer Konstante, genannt *Gödel-Universum*. In diesem sind Zeitreisen möglich. XXXX

Kapitel 34

Lemaître–Toleman–Bondi-Metrik

Die *Lemaître–Toleman–Bondi-Metrik*, gefunden von George Lemaître im Jahr 1933 sowie Ricard Toleman im Jahr 1934 und später untersucht von Hermann Bondi im Jahr 1947, beschreibt die Entwicklung einer endlichen oder unendlich großen Staubwolke unter ihrer eigenen Gravitation. XXXX

Kapitel 35

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik (FLRW-Metrik)

Die *Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-Metrik* beschreibt ein homogene isotrop expandierendes Universum. XXXX

Kapitel 36

McVittie-Metrik

Die *McVittie-Metrik* beschreibt

$K(r) := 1 + \kappa r^2$ und $\mu(t) := \frac{2GM}{c^2 a(t)}$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{1 - \frac{\mu(t)}{4r} K(r)^{1/2}}{1 + \frac{\mu(t)}{4r} K(r)^{1/2}} \right)^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{(1 + \frac{\mu(t)}{4r} K(r)^{1/2})^4}{K(r)^2} (\mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2) \tag{36.1}$$

Teil VII

Exotische exakte Lösungen

Kapitel 37

Einstein–Rosen-Metrik

Die *Einstein–Rosen-Metrik*, gefunden von Albert Einstein und Nathan Rosen im Jahr 1937, verbindet zwei identische äußere Lösungen Schwarzer Löcher am Ereignishorizont miteinander und kann topologisch interpretiert werden als das Aneinanderkleben zweier verschiedener Raumzeiten, wobei die Naht als *Einstein–Rosen-Brücke* und der gesamte Übergang als Analogie zu der Abkürzung, die ein Wurm in einem Apfel nimmt, *Wurmloch* genannt wird. Dieses ist in nur eine Richtung passierbar, im einen Universum befindet sich ein Schwarzes Loch, welches lediglich Masse absorbieren kann, im anderen ein *Weißes Loch*, welches lediglich Masse ausstoßen kann.

37.1 Schwarzschild-Wurmloch

Die der Schwarzschild-Metrik entsprechende Einstein–Rosen-Metrik, auch *Schwarzschild-Wurmloch* genannt, entsteht aus dieser durch die Koordinatentransformation $\widetilde{r}^2 = r - r_\mathrm{S}$ mit $2\widetilde{r}\mathrm{d}\widetilde{r} = \mathrm{d}r$ mit welcher:

$$1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} = \frac{r - r_\mathrm{S}}{r} = \frac{\widetilde{r}^2}{\widetilde{r}^2 + r_\mathrm{S}}, \tag{37.1}$$

womit für das Linienelement:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\widetilde{r}^2}{\widetilde{r}^2 + r_\mathrm{S}} c^2 \mathrm{d}t^2 - 4(\widetilde{r}^2 + r_\mathrm{S})\mathrm{d}\widetilde{r}^2 - (\widetilde{r}^2 + r_\mathrm{S})^2 \mathrm{d}\Omega^2. \tag{37.2}$$

Für $\widetilde{r} < 0$ ergibt sich die eine, für $\widetilde{r} > 0$ die andere Raumzeit und für $\widetilde{r}$ genau der Ereignishorizont, also die Einstein–Rosen-Brücke.

37.2 Reissner–Nordstrøm-Wurmloch

Die der Reissner–Nordstrøm-Metrik entsprechende Einstein–Rosen-Metrik, auch *Reissner–Nordstrøm-Wurmloch* genannt, entsteht aus dieser durch die Koordinatentransformation

$\widetilde{r}^2 = r - r_+$ mit $2\widetilde{r}\mathrm{d}\widetilde{r} = \mathrm{d}r$ mit welcher:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r} + \frac{r_\mathrm{Q}^2}{r^2} = \frac{r^2 - r_\mathrm{S} r + r_\mathrm{Q}^2}{r^2} &= \frac{(\widetilde{r}^2 + r_+)^2 - r_\mathrm{S}(\widetilde{r}^2 + r_+) + r_\mathrm{Q}^2}{(\widetilde{r}^2 + r_+)^2} \\ &= \frac{\widetilde{r}^4 + (2r_+ - r_\mathrm{S})\widetilde{r}^2 + \overbrace{r_+^2 - r_\mathrm{S} r_+ + r_\mathrm{Q}^2}^{=0}}{(\widetilde{r}^2 + r_+)^2} \\ &= \frac{\widetilde{r}^2}{(\widetilde{r}^2 + r_+)^2}\left(\widetilde{r}^2 + \sqrt{r_\mathrm{S}^2 - 4r_\mathrm{Q}^2}\right), \end{aligned} \tag{37.3}$$

womit für das Linienelement:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\frac{\widetilde{r}^2}{(\widetilde{r}^2 + r_+)^2}\left(\widetilde{r}^2 + \sqrt{r_\mathrm{S}^2 - 4r_\mathrm{Q}^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 \\ &- 4(\widetilde{r}^2 + r_+)^2 \left(\widetilde{r}^2 + \sqrt{r_\mathrm{S}^2 - 4r_\mathrm{Q}^2}\right)^{-1} \mathrm{d}\widetilde{r}^2 - (\widetilde{r}^2 + r_+)\mathrm{d}\Omega^2. \end{aligned} \tag{37.4}$$

Für $\widetilde{r} < 0$ ergibt sich die eine, für $\widetilde{r} > 0$ die andere Raumzeit und für $\widetilde{r}$ genau der Ereignishorizont, also die Einstein–Rosen-Brücke.

Kapitel 38

Geschlossene Zeitschleifen

Definition 38.1 (Chronologische Raumzeit)**.** *Eine Raumzeit in der es keine zeitartig geschlossenen Kurven gibt, wird* chronologisch *genannt.*

Definition 38.2 (Kausale Raumzeit)**.** *Eine Raumzeit in der es keine zeitartig oder lichtartig geschlossenen Kurven gibt, wird* kausal *genannt.*

Jede chronologische Raumzeit ist insbesondere kausal.

Definition 38.3 (Streng kausale Raumzeit)**.**

Teil VIII

Kosmologische Modelle

Kapitel 39

Sterne

Angenommen wird ein Stern dessen Dichte ρ und Druck P radial sind.

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 \rho(r') \tag{39.1}$$

Oder in differentieller Form:

$$\mathcal{M}'(r) = 4\pi\rho(r)r^2 \tag{39.2}$$

Für die Kugelschale zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ wird angenommen, dass sich die Gravitations- und Druckkraft auf sie ausgleichen, also:

$$4\pi r^2 \mathrm{d}P(r) + 4\pi r^2 \mathrm{d}r\rho(r)\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\rho(r) \tag{39.3}$$

39.1 Weiße Zwerge

Die *kritische Dichte* eines Weißen Zwergs ist damit:

$$\rho_{\text{crit.}} \sim \frac{m_n}{(\hbar/m_e c)^3} \tag{39.4}$$

39.2 Neutronenstern

Die *kritische Dichte* eines Neutronensterns ist damit:

$$\rho_{\text{crit.}} \sim \frac{m_n}{(\hbar/m_n c)^3} \tag{39.5}$$

39.3 Quarksterne

XXXX

Kapitel 40

Singularitätentheoreme

Definition 40.1 (Expansionsskalar)**.** *XXXX*

$$\Theta := u^{\mu}_{;\mu} \tag{40.1}$$

$$h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u_\mu u_\nu \tag{40.2}$$

Definition 40.2 (Rotationstensor)**.** *XXXX*

$$\omega_{\mu\nu} := u_{[\mu;\nu]} + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} u_{[\mu} u_{\nu]} \tag{40.3}$$

Definition 40.3 (Scherungstensor)**.** *XXXX*

$$\sigma_{\mu\nu} := u_{(\mu;\nu)} + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} u_{(\mu} u_{\nu)} - \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} \tag{40.4}$$

Offenbar ist:

$$u_{\mu;\nu} = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} u_\mu u_\nu + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} \tag{40.5}$$

Teil IX

Tetrad-Formalismus

Kapitel 41

Tetrade

$$e^a_\mu := \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \tag{41.1}$$

$$e^\nu_b := \eta_{ab} g^{\mu\nu} e^a_\mu \tag{41.2}$$

Gleichung () wird zu:

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} \tag{41.3}$$

$$\gamma^a_{bc} := e^\mu_b e^\nu_c e^a_{\mu;\nu} = -e^\nu_c \omega^{ad}_\nu \eta_{bd} \tag{41.4}$$

$$\gamma_{abc} := \eta_{ad} \gamma^d_{bc} \tag{41.5}$$

$$e^a(e_b) = e^a_\mu e^\nu_b \mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = e^a_\mu e^\nu_b \delta^\nu_\mu = e^a_\sigma e^\sigma_b \tag{41.6}$$

$$e^a(\partial_\mu) = e^a_\nu \mathrm{d}x^\nu(\partial_\mu) = e^a_\nu \delta^\nu_\mu = e^a_\mu \tag{41.7}$$

$$\mathrm{d}x^\mu(e_a) = \mathrm{d}x^\mu(e^\nu_a \partial_\nu) = e^\nu_a \mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = e^\nu_a \delta^\mu_\nu = e^\mu_a \tag{41.8}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(\partial_\mu(e^a_\kappa e^b_\nu) + \partial_\nu(e^a_\kappa e^b_\mu) - \partial_\kappa(e^a_\mu e^b_\nu)\right) \eta_{ab} \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left((\partial_\mu e^a_\kappa) e^b_\nu + e^a_\kappa \partial_\mu e^b_\nu + (\partial_\nu e^a_\kappa) e^b_\mu + e^a_\kappa \partial_\nu e^b_\mu - (\partial_\kappa e^a_\mu) e^b_\nu - e^a_\mu \partial_\kappa e^b_\nu\right) \eta_{ab}\end{aligned}$$

Kapitel 42

Spinverbindung

Definition 42.1 (Spinverbindung)**.**

$$\omega_\mu^{ab} := e_\sigma^a \nabla_\mu e^{\sigma b} = e_\sigma^a \partial_\mu e^{\sigma b} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a e^{\nu b} = -e^{\sigma b}\partial_\mu e_\sigma^a + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a e^{\nu b} \tag{42.1}$$

$$\omega_{\mu\ c}^{\ a} = \omega_\mu^{ab}\eta_{bc} = e_\sigma^a \nabla_\mu e_c^\sigma = e_\sigma^a \partial_\mu e_c^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a e_c^\nu = -e_c^\sigma \partial_\mu e_\sigma^a + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a e_c^\nu \tag{42.2}$$

Durch die Anwendung von $e_a^\rho \eta_{bc}$ auf die zweite Darstellung bzw. $e_{\pi b} = g_{\pi\rho} e_b^\rho$ auf die dritte Darstellung ergibt sich umgekehrt eine Darstellung der partiellen Ableitungen der Tetradverbindungen mithilfe der Spinverbindung:

$$\partial_\mu e_c^\rho = e_a^\rho \omega_\mu^{ab}\eta_{bc} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_c^\nu \tag{42.3}$$

$$\partial_\mu e_\pi^a = -e_{\pi b}\omega_\mu^{ab} + \Gamma_{\mu\pi}^\sigma e_\sigma^a. \tag{42.4}$$

$$\nabla_\lambda \omega_\mu^{ab} = \partial_\lambda \omega_\mu^{ab} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \omega_\rho^{ab} \tag{42.5}$$

$$\omega_\mu^{ab}\eta_{ab} = \Gamma_{\mu\nu}^\nu + e_\sigma^a \partial_\mu e_a^\sigma \tag{42.6}$$

Definition 42.2 (Tetradform)**.** *Die 1-Form:*

$$e^a := e_\mu^a \mathrm{d}x^\mu \tag{42.7}$$

ist die Tetradform *(oder* Tetrad-1-Form*).*

Die Anwendung des Cartan-Differentials d auf die Tetradform ergibt mit Gleichung (XXXX) die 2-Form:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^a &= \mathrm{d}(e_\nu^a \mathrm{d}x^\nu) = \partial_\mu e_\nu^a \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \left(-e_{\nu b}\omega_\mu^{ab} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a\right)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= -(\omega_{\mu\ b}^{\ a}\mathrm{d}x^\mu) \wedge (e_\nu^b \mathrm{d}x^\nu) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = -\omega^a{}_b \wedge e^b + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\end{aligned} \tag{42.8}$$

Definition 42.3 (Spinverbindungsform)**.** *Die 1-Form:*

$$\omega^{ab} := \omega_\mu^{ab}\mathrm{d}x^\mu \tag{42.9}$$

ist die Spinverbindungsform *(oder* Spinverbindungs-1-Form*).*

$$\omega^a{}_b = \omega^{ac}\eta_{bc} = e^a_\sigma(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^\nu_b + \partial_\mu e^\sigma_b)\mathrm{d}x^\mu \tag{42.10}$$

Die Anwendung des Cartan-Differentials d auf die Spinverbindungsform ergibt mit XXXX die 2-Form:

$$\mathrm{d}\omega^a{}_b = \eta_{bc}\mathrm{d}(\omega^{ac}_\nu \mathrm{d}x^\nu) = \partial_\mu\omega^{ab}_\nu \mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu = \partial_\xi\omega^a{}_b\wedge\mathrm{d}x^\xi = \left((\partial_\xi\Gamma^\sigma_{\mu\nu})e^a_\sigma e^\nu_b + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\partial_\xi e^a_\sigma)e^\nu_b + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^a_\sigma\partial_\xi e^\nu_b + (\partial_\xi e^a_\sigma)\right. \tag{42.11}$$

$$\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = e^a_\rho\left(\Gamma^\rho_{\kappa\lambda}e^\lambda_c + \partial_\kappa e^\rho_c\right)e^c_\sigma\left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^\nu_b + \partial_\mu e^\sigma_b\right)\mathrm{d}x^\kappa \wedge \mathrm{d}x^\mu = \Gamma^\rho_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}e^a_\rho e^\nu_b \tag{42.12}$$

Definition 42.4 (Torsionsform)**.** *Die 2-Form:*

$$\Theta^a := \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^a_\sigma \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{42.13}$$

ist die Torsionsform *(oder* Torsions-2-Form*).*

$$\Theta^a = \frac{1}{2}\Theta^a_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{42.14}$$

$$\Theta^a_{\mu\nu} = \left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right)e^a_\sigma = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{\nu b} - \omega^{ab}_\nu e_{\mu b} \tag{42.15}$$

Die Torsionsform verschwindet genau für verschwindende Torsion, da $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ in diesem Fall symmetrisch und $\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ in diesem Fall antisymmetrisch unter der Vertauschung der Indizes μ und ν ist.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{\kappa a}\left(\mathrm{d}(g_{\kappa\nu}\mathrm{d}x^\nu) - \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) \tag{42.16}$$

Definition 42.5 (Krümmungsform)**.** *Die 2-Form:*

$$R^a{}_b := \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}e^c \wedge e^d \tag{42.17}$$

ist die Krümmungsform *(oder* Krümmungs-2-Form*).*

Die Terme R^a_{bcd} und $e^c \wedge e^d$ sind beide antisymmetrisch unter der Vertauschung der Indizes c und d.

Satz 42.6 (Cartan-Strukturgleichungen)**.** *Die Spinverbindungsform, die Torsionsform und die Krümmungsform sind verbunden über die* Cartanschen Strukturgleichungen*:*

$$\mathrm{d}\Theta^a + \omega^a{}_b \wedge \Theta^b = R^a{}_b \wedge e^b; \tag{42.18}$$

$$\mathrm{d}R^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0. \tag{42.19}$$

Beweis. Die Anwendung des Cartan-Differntials d auf die Torsionsform Θ^a und die Krümmungsform $R^a{}_b$ ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta^a &= \underbrace{\mathrm{d}^2e^a}_{=0} + \mathrm{d}\left(\omega^a{}_b \wedge e^b\right) = \mathrm{d}\omega^a{}_b \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}e^b \\ &= (R^a{}_b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge \left(\Theta^b - \omega^b{}_c \wedge e^c\right) = R^a{}_b \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge \Theta^b;\end{aligned} \tag{42.20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R^a{}_b &= \underbrace{\mathrm{d}^2\omega^a{}_b}_{=0} + \mathrm{d}\left(\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b\right) = \mathrm{d}\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \mathrm{d}\omega^c{}_b \\ &= \left(R^a{}_c - \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c\right) \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \left(R^c{}_b - \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b\right) = R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b.\end{aligned} \tag{42.21}$$

□

Mit dem kovarianten Differential lassen sich die Gleichungen (XXXX), (XXXX) und (XXXX) vereinfacht schreiben

$$De^a = \Theta^a \tag{42.22}$$

$$D\omega^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + 2\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{42.23}$$

$$D\Theta^a = R^a{}_b \wedge e^b \tag{42.24}$$

$$DR^a{}_b = 0 \tag{42.25}$$

Teil X

Weiterführende Differentialgeometrie

Kapitel 43

Weiterführende Tensoren

43.1 Plebanski-Tensor

$$S_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} \tag{43.1}$$

Definition 43.1 (Plebanski-Tensor)**.**

$$P^{ab}{}_{cd} := S^{[a}_{[c} S^{b]}_{d]} + \delta^{[a}_{[c} S^{b]e} S_{d]e} - \frac{1}{6} \delta^{[a}_{[c} \delta^{b]}_{d]} S^{ef} S_{ef} \tag{43.2}$$

43.2 Kulkarni–Nomizu-Produkt und Weyl-Tensor

Definition 43.2 (Kulkarni–Nomizu-Produkt)**.** *Für zwei Tensoren ist:*

$$(A \owedge B)_{\kappa\lambda\mu\nu} := 2\left(A_{\kappa[\nu} B_{\mu]\lambda} + A_{\lambda[\mu} B_{\nu]\kappa}\right) = A_{\kappa\nu} B_{\mu\lambda} + A_{\lambda\mu} B_{\nu\kappa} - A_{\kappa\mu} B_{\nu\lambda} - A_{\lambda\nu} B_{\mu\kappa} \tag{43.3}$$

das Kulkarni–Nomizu-Produkt.

Es folgt sofort aus der Definition, dass das Kulkarni–Nomizu-Produkt symmetrischer Tensoren symmetrisch ist

Definition 43.3 (Weyl-Tensor)**.**

$$C_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{1}{N-2}\left(R - \frac{R}{N} g \owedge g\right)_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{R}{2N(N-1)} (g \owedge g)_{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{43.4}$$

$$\begin{aligned} C_{\kappa\lambda\mu\nu} := R_{\kappa\lambda\mu\nu} &- \frac{1}{2}\left(R_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - R_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} + R_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - R_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu}\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu}\right) R \end{aligned} \tag{43.5}$$

Der Weyl-Tensor hat eher geringe Bedeutung, da der kovariante Krümmungstensor meist vorgezogen wird. Er hat die gleichen Symmetrien wie dieser aber ist jedoch spurfrei. Wird die Konstruktion des Ricci-Tensors aus dem kovarianten Krümmungstensor auf den Weyl-Tensor angewendet:

$$g^{\kappa\mu} C_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0 \tag{43.6}$$

Kapitel 44

Weyl-Transformation

Definition 44.1 (Weyl-Transformation)**.** *Eine Reskalierung des metrischen Tensors durch eine Raumzeitfunktion $\Omega(x)$ bzw. $\omega(x)$:*

$$g^{\mu\nu} \to \overline{g}^{\mu\nu} = \Omega(x)^{-2} g^{\mu\nu} = e^{2\omega(x)} g^{\mu\nu} \tag{44.1}$$

$$g_{\mu\nu} \to \overline{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^{2} g_{\mu\nu} = e^{-2\omega(x)} g_{\mu\nu} \tag{44.2}$$

wird als Weyl-Transformation *bezeichnet.*

Die Determinante des metrischen Tensors transformiert nun gemäß:

$$\sqrt{-\overline{g}} = \Omega(x)^N \sqrt{-g} = e^{-N\omega(x)} \sqrt{-g} \tag{44.3}$$

Das Christoffelsymbol erster Art transformiert nun gemäß:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} &= \Omega^2 \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Omega \left(g_{\lambda\nu} \partial_\mu \Omega + g_{\mu\lambda} \partial_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \Omega \right) \\ &= e^{-2\omega} \Gamma_{\lambda\mu\nu} - e^{-2\omega} \left(g_{\lambda\nu} \partial_\mu \omega + g_{\mu\lambda} \partial_\nu \omega - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \omega \right). \end{aligned} \tag{44.4}$$

Das Christoffelsymbol zweiter Art transformiert nun gemäß:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = \overline{g}^{\lambda\sigma} \overline{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Omega^{-1} \left(\delta^{\sigma}_{\nu} \partial_\mu \Omega + \delta^{\sigma}_{\mu} \partial_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \Omega \right) \\ &= \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \left(\delta^{\sigma}_{\mu} \partial_\nu \omega + \delta^{\sigma}_{\nu} \partial_\mu \omega - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \omega \right). \end{aligned} \tag{44.5}$$

Das Christoffelsymbol dritter Art transformiert nun gemäß:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{\sigma} = \overline{g}^{\mu\nu} \overline{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} &= \Omega^{-2} \Gamma^{\sigma} + (D-2) \Omega^{-3} \partial^\sigma \Omega \\ &= e^{2\omega} \left(\Gamma^{\sigma} + (D-2) \partial^\sigma \omega \right). \end{aligned} \tag{44.6}$$

Für ein Skalarfeld ψ mit dem transformierten Feld $\overline{\psi} = \Omega^{-n} \psi$ ist:

$$\begin{aligned} \overline{\Box}_\nabla \overline{\psi} &= \overline{g}^{\mu\nu} \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\nu (\Omega^{-n} \psi) = \overline{g}^{\mu\nu} \overline{\nabla}_\mu \partial_\nu (\Omega^{-n} \psi) = \overline{g}^{\mu\nu} \overline{\nabla}_\mu \left(-n \Omega^{-(n+1)} \psi \partial_\nu \Omega + \Omega^{-n} \partial_\nu \psi \right) \\ &= \overline{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \left(-n \Omega^{-(n+1)} \psi \partial_\nu \Omega + \Omega^{-n} \partial_\nu \psi \right) - \overline{\Gamma}^{\sigma} \left(-n \Omega^{-(n+1)} \psi \partial_\sigma \Omega + \Omega^{-n} \partial_\sigma \psi \right) \\ &= \overline{g}^{\mu\nu} \big(n(n+1) \Omega^{-(n+2)} \psi (\partial_\mu \Omega) \partial_\nu \Omega - n \Omega^{-(n+1)} (\partial_\mu \psi) \partial_\nu \Omega - n \Omega^{-(n+1)} \psi \partial_{\mu\nu} \Omega \\ &\quad - n \Omega^{-(n+1)} (\partial_\mu \Omega)(\partial_\nu \psi) + \Omega^{-n} \partial_{\mu\nu} \psi \big) \\ &\quad - \Omega^{-(n+2)} (\Gamma^{\sigma} + (D-2) \Omega^{-1} \partial^\sigma \Omega) \left(-n \Omega^{-1} \psi \partial_\sigma \Omega + \partial_\sigma \psi \right) \big) \\ &= \Omega^{-(n+2)} \big(\Box_\partial \psi - n \Omega^{-1} \psi \Box_\partial \Omega - 2n \Omega^{-1} (\partial \Omega)(\partial \psi) + n(n+1) \Omega^{-2} (\partial \Omega)^2 \psi \\ &\quad - \Gamma^{\sigma} \partial_\sigma \psi + n \Omega^{-1} \psi \Gamma^{\sigma} \partial_\sigma \Omega - (D-2) \Omega^{-1} (\partial \Omega)(\partial \psi) + (D-2) n \Omega^{-2} (\partial \Omega)^2 \psi \\ &= \Omega^{-(n+2)} \big(\Box_\nabla \psi - n \Omega^{-1} \psi \Box_\nabla \Omega \\ &\quad - (D+2n-2) \Omega^{-1} (\partial \Omega)(\partial \psi) + (D+n-1) n \Omega^{-2} (\partial \Omega)^2 \psi \big) \end{aligned} \tag{44.7}$$

Für $D = 4$ fällt der Term mit der ersten partiellen Ableitung von ψ mit $n = -1$ heraus. Mit $\overline{\psi} = \Omega\psi$ ist daher:

$$\overline{\Box}_{\nabla}\overline{\psi} = \Omega^{-1}\left(\Box_{\nabla}\psi + (\Omega^{-1}\Box_{\nabla}\Omega - 2\Omega^{-2}(\partial\Omega)^2)\psi\right). \tag{44.8}$$

Für $n = 0$ und $\overline{\psi} = \psi = \Omega$ folgt aus Gleichung (XXXX):

$$\overline{\Box}_{\nabla}\Omega = \Omega^{-2}(\Box_{\nabla}\Omega - (D-2)\Omega^{-1}(\partial\Omega)^2). \tag{44.9}$$

Für ein Skalarfeld ψ mit dem transformierten Feld $\overline{\psi} = e^{n\omega}\psi$ ist:

$$\begin{aligned}
\overline{\Box}_{\nabla}\overline{\psi} &= \overline{g}^{\mu\nu}\overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}(e^{n\omega}\psi) = \overline{g}^{\mu\nu}\overline{\nabla}_{\mu}\partial_{\nu}(e^{n\omega}\psi) = \overline{g}^{\mu\nu}\overline{\nabla}_{\mu}\left(e^{n\omega}(\partial_{\nu}\psi + n\psi\partial_{\nu}\omega)\right) \\
&= \overline{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\left(e^{n\omega}(\partial_{\nu}\psi + n\psi\partial_{\nu}\omega)\right) - e^{n\omega}\overline{\Gamma}^{\sigma}(\partial_{\sigma}\psi + n\psi\partial_{\sigma}\omega) \\
&= e^{(n+2)\omega}g^{\mu\nu}\big(n(\partial_{\mu}\omega)(\partial_{\nu}\psi + n\psi\partial_{\nu}\omega) + \partial_{\mu\nu}\psi + n(\partial_{\mu}\psi)(\partial_{\nu}\omega) + n\psi\partial_{\mu\nu}\omega\big) \\
&- e^{(n+2)\omega}\left(\Gamma^{\sigma} + (D-2)\partial^{\sigma}\omega\right)(\partial_{\sigma}\psi + n\psi\partial_{\sigma}\omega) \\
&= e^{(n+2)\omega}\big(\Box_{\partial}\psi + n\psi\Box_{\partial}\omega + 2n(\partial\omega)(\partial\psi) + n^2(\partial\omega)^2\psi \\
&- \Gamma^{\sigma}\partial_{\sigma}\psi - n\psi\Gamma^{\sigma}\partial_{\sigma}\omega - (D-2)(\partial\omega)(\partial\psi) - (D-2)n(\partial\omega)^2\psi\big) \\
&= e^{(n+2)\omega}\left(\Box_{\nabla}\psi + n\psi\Box_{\nabla}\omega + (-D+2n+2)(\partial\omega)(\partial\psi) + (-D+n+2)n\psi(\partial\omega)^2\right)
\end{aligned} \tag{44.10}$$

Für $D = 4$ fällt der Term mit der ersten partiellen Ableitung von ψ mit $n = 1$ heraus. Mit $\overline{\psi} = e^{\omega}\psi$ ist daher:

$$\overline{\Box}_{\nabla}\overline{\psi} = e^{3\omega}\left(\Box_{\nabla}\psi + (\Box_{\nabla}\omega - (\partial\omega)^2)\psi\right). \tag{44.11}$$

Für $n = 0$ und $\overline{\psi} = \psi = \omega$ folgt aus Gleichung (XXXX):

$$\overline{\Box}_{\nabla}\omega = e^{2\omega}\left(\Box_{\nabla}\omega - (D-2)(\partial\omega)^2\right). \tag{44.12}$$

Der Riemann–Christoffel-Krümmungstensor transformiert nun gemäß:

$$\begin{aligned}
\overline{R}^{\rho}_{\lambda\mu\nu} - R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_{\mu}\left(\overline{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\right) - \partial_{\nu}\left(\overline{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\right) \\
&+ \left(\overline{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\right) - \left(\overline{\Gamma}^{\rho}_{\nu\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\right) \\
&= -\partial_{\mu}\left(\delta^{\rho}_{\lambda}\partial_{\nu}\omega + \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\lambda}\omega - g_{\lambda\nu}\partial^{\rho}\omega\right) + \partial_{\nu}\left(\delta^{\rho}_{\lambda}\partial_{\mu}\omega + \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\lambda}\omega - g_{\lambda\mu}\partial^{\rho}\omega\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^{\rho}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu \overline{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \overline{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\mu} + \overline{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\nu} - \overline{\Gamma}^{\rho}_{\nu\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\mu} \\
&= \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \\
&- \partial_\mu \left(\cancel{\delta^\rho_\lambda \partial_\nu \omega} + \delta^\rho_\nu \partial_\lambda \omega - g_{\lambda\nu}\partial^\rho \omega\right) + \partial_\nu \left(\cancel{\delta^\rho_\lambda \partial_\mu \omega} + \delta^\rho_\mu \partial_\lambda \omega - g_{\lambda\mu}\partial^\rho\omega\right) \\
&- \left(\delta^\rho_\mu \partial_\sigma \omega + \cancel{\delta^\rho_\sigma \partial_\mu \omega} - g_{\mu\sigma}\partial^\rho\omega\right)\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\left(\cancel{\delta^\sigma_\lambda \partial_\nu \omega} + \cancel{\delta^\sigma_\nu \partial_\lambda \omega} - g_{\lambda\nu}\partial^\sigma\omega\right) \\
&+ \left(\delta^\rho_\nu \partial_\sigma \omega + \cancel{\delta^\rho_\sigma \partial_\nu \omega} - g_{\nu\sigma}\partial^\rho\omega\right)\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\left(\cancel{\delta^\sigma_\lambda \partial_\mu \omega} + \cancel{\delta^\sigma_\mu \partial_\lambda \omega} - g_{\lambda\mu}\partial^\sigma\omega\right) \\
&+ \left(\delta^\rho_\mu \partial_\sigma \omega + \delta^\rho_\sigma \partial_\mu \omega - g_{\mu\sigma}\partial^\rho\omega\right)\left(\delta^\sigma_\lambda \partial_\nu \omega + \delta^\sigma_\nu \partial_\lambda \omega - g_{\lambda\nu}\partial^\sigma\omega\right) \\
&- \left(\delta^\rho_\nu \partial_\sigma \omega + \delta^\rho_\sigma \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma}\partial^\rho\omega\right)\left(\delta^\sigma_\lambda \partial_\mu \omega + \delta^\sigma_\mu \partial_\lambda \omega - g_{\lambda\mu}\partial^\sigma\omega\right) \\
&= R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} - \delta^\rho_\nu \partial_\lambda \partial_\mu \omega + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\partial^\rho\omega + \delta^\rho_\mu \partial_\lambda\partial_\nu\omega - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\partial^\rho\omega + \cancel{(\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})\partial^\rho\omega} \\
&- \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta^\rho_\mu\partial_\sigma\omega + \cancel{\Gamma_{\mu\lambda\nu}\partial^\rho\omega} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}g_{\lambda\nu}\partial^\sigma\omega + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\delta^\rho_\nu\partial_\sigma\omega - \cancel{\Gamma_{\nu\lambda\mu}\partial^\rho\omega} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}g_{\lambda\mu}\partial^\sigma\omega \\
&+ (\delta^\rho_\mu\partial_\nu\omega - \delta^\rho_\nu\partial_\mu\omega)\partial_\lambda\omega + \cancel{(\delta^\rho_\mu\partial_\nu\omega - \delta^\rho_\nu\partial_\mu\omega)\partial_\lambda\omega} - (\delta^\rho_\mu g_{\lambda\nu} - \delta^\rho_\nu g_{\lambda\mu})(\partial\omega)^2 \\
&+ \underbrace{(\delta^\rho_\lambda - \delta^\rho_\lambda)}_{=0}(\partial_\mu\omega)(\partial_\nu\omega) + \cancel{(\delta^\rho_\nu\partial_\mu\omega - \delta^\rho_\mu\partial_\nu\omega)\partial_\lambda\omega} - \cancel{(g_{\lambda\nu}\partial_\mu\omega - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\omega)\partial^\rho\omega} \\
&- (g_{\mu\lambda}\partial_\nu\omega - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\omega)\partial^\rho\omega - \underbrace{(g_{\mu\sigma}\delta^\sigma_\nu - g_{\nu\sigma}\delta^\sigma_\mu)}_{=0}(\partial^\rho\omega)(\partial_\lambda\omega) + \cancel{(g_{\lambda\nu}\partial_\mu\omega - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\omega)\partial^\rho\omega} \\
&= R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} + \delta^\rho_\mu\partial_\lambda\partial_\nu\omega - \delta^\rho_\nu\partial_\lambda\partial_\mu\omega + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\partial^\rho\omega - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\partial^\rho\omega \\
&+ \left(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\delta^\rho_\nu - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta^\rho_\mu\right)\partial_\sigma\omega + \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}g_{\lambda\mu}\right)\partial^\sigma\omega \\
&+ (\delta^\rho_\mu\partial_\nu\omega - \delta^\rho_\nu\partial_\mu\omega)\partial_\lambda\omega - (\delta^\rho_\mu g_{\lambda\nu} - \delta^\rho_\nu g_{\lambda\mu})(\partial\omega)^2 - (g_{\mu\lambda}\partial_\nu\omega - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\omega)\partial^\rho\omega
\end{aligned} \tag{44.13}
$$

(Siehe PSE, Frage 737296)
Der Ricci-Tensor transformiert nun gemäß:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_{\lambda\nu} = \overline{R}^{\rho}_{\lambda\rho\nu} &= R_{\lambda\nu} + (D-1)\partial_{\lambda\nu}\omega + g_{\lambda\nu}\partial_\rho\partial^\rho\omega - g_{\lambda\rho}\partial_\nu\partial^\rho\omega \\
&- (D-1)\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\partial_\sigma\omega + (\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}g_{\lambda\rho})\partial^\sigma\omega \\
&+ (D-1)(\partial_\lambda\omega)\partial_\nu\omega + (D-1)g_{\lambda\nu}(\partial\omega)^2
\end{aligned} \tag{44.14}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{-2\omega}\overline{R} &= R + (D-1)\left(\Box\omega + \partial_\rho\partial^\rho\omega + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\partial^\sigma\omega - (D-2)(\partial\omega)^2\right) \\
&= R + (D-1)\left(2\Box\omega - (D-2)(\partial\omega)^2\right)
\end{aligned} \tag{44.15}
$$

$$
\left(\overline{\Box}_\nabla - \xi\overline{R}\right)\overline{\psi} = e^{3\omega}\left(\Box_\nabla + (\Box_\nabla\omega - (\partial\omega)^2) - \xi(R + 3(\Box_\nabla\omega - 2(\partial\omega)^2 + \nabla_\rho\partial^\rho\omega))\right)\psi \tag{44.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} &= \left(\overline{\nabla}_\lambda - \nabla_\lambda\right)g_{\mu\nu} = -\left(\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\right)g_{\sigma\nu} - \left(\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\right)g_{\mu\sigma} \\
&= \left(\delta^\sigma_\mu\partial_\lambda\omega + \delta^\sigma_\lambda\partial_\mu\omega - g_{\lambda\mu}\partial^\sigma\omega\right)g_{\sigma\nu} + \left(\delta^\sigma_\nu\partial_\lambda\omega + \delta^\sigma_\lambda\partial_\nu\omega - g_{\lambda\nu}\partial^\sigma\omega\right)g_{\mu\sigma} \\
&= g_{\mu\nu}\partial_\lambda\omega + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\omega - g_{\lambda\mu}\partial_\lambda\omega + g_{\mu\nu}\partial_\lambda\omega + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\omega - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\omega = 2g_{\mu\nu}\partial_\lambda\omega
\end{aligned} \tag{44.17}
$$

Lemma 44.2.

Lemma 44.3. *Für Weyl-Transformationen $\overline{g}_{\mu\nu} = e^{-2\omega}g_{\mu\nu}$, $\overline{m} = e^{k\omega}m$ und $\overline{\psi} = e^{n\omega}\psi$ ist die modifizierte Klein–Gordon-Gleichung:*

$$
\left(\Box + m^2 - \xi R\right)\psi = 0 \tag{44.18}
$$

genau dann weyl-invariant, wenn $k = 1$, $n = 1$, $D = 4$ und $\xi = 1/6$.

Beweis. XXXX

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Box}+\overline{m}^2-\xi\overline{R}\right)\overline{\psi} &= e^{3\omega}\left(\Box+\left(\Box\omega-(\partial\omega)^2\right)\right)\psi+e^{3\omega}m^2\psi \\ &\quad -\xi e^{3\omega}\left(R+(D-1)\left(2\Box\omega-(D-2)(\partial\omega)^2\right)\right)\psi \\ &= e^{3\omega}(\Box+m^2-\xi R)\psi+e^{3\omega}(1-2(D-1)\xi)(\Box\omega)\psi \\ &\quad +e^{3\omega}(-1+(D-1)(D-2)\xi)(\partial\omega)^2\psi \qquad (44.19)\end{aligned}$$

Die hinteren beiden Terme verschwinden, wenn:

$$2(D-1)\xi=1; \qquad (44.20)$$

$$(D-1)(D-2)\xi=1, \qquad (44.21)$$

also für $D=4$ und $\xi=1/6$. □

Teil XI

Alternative Gravitationstheorien

Kapitel 45

f(R)-Gravitation

Die *$f(R)$-Gravitation* verallgemeinert die Lagrange-Dichte der Einstein–Hilbert-Wirkung nach Satz (15.1) durch eine unbekannte Funktion f zu:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} f(R) \tag{45.1}$$

Satz 45.1 (Feldgleichungen der f(R)-Gravitation)**.** *Die Einsteinschen Feldgleichungen der $f(R)$-Gravitation sind gegeben durch:*

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu)\, f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{45.2}$$

Für $f(R) = R$ mit $f'(R) = 1$ ergeben sich die ursprünglichen Einsteinschen Feldgleichungen (XXXX).

Beweis. XXXX □

45.1 R^2-Gravitation

Ein Spezialfall der $f(R)$-Gravitation ist die *R^2-Gravitation* mit $f(R) = R^2$ und $f'(R) = 2R$, für welche die Einsteinschen Feldgleichungen nach Satz (45.1) gegeben sind durch:

$$2RR_{\mu\nu} - \frac{R^2}{2} g_{\mu\nu} + 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{45.3}$$

In der R^2-Gravitation sind Wurmlöcher stabil und es ist keine exotische Materie notwendig.

45.2 Starobinsky-Gravitation

Ein Spezialfall der $f(R)$-Gravitation ist die *Starobinsky-Gravitation* mit:

$$f(R) = R - \frac{R^2}{6M^2} \tag{45.4}$$

mit einem Massenskalar M, für welche die Einsteinschen Feldgleichungen nach Satz (45.1) gegeben sind durch:

$$\left(1 - \frac{R}{3M^2}\right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(R - \frac{R^2}{6M^2}\right) g_{\mu\nu} - \frac{1}{3M^3}\left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{45.5}$$

Teil XII

Gravitationsstrahlung

Kapitel 46

Linearisierte Feldgleichungen

Für schwache Gravitationsfelder lassen sich die Einsteinschen Feldgleichungen (XXXX) linearisieren. Zunächst wird der metrische Tensor als Summe des Minkowski-Tensors und der als klein geforderten zusätzlichen Beiträge des Gravitationsfeldes ausgedrückt:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad |h_{\mu\nu}| < 1 \tag{46.1}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad |h^{\mu\nu}| < 1, \tag{46.2}$$

wobei das Minuszeichen begründet ist durch die Forderung, dass sich in erster Ordnung der Störung das Kronecker-Delta ergeben muss:

$$g_{\lambda\mu}g^{\mu\nu} = (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu})(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) = \delta^\nu_\lambda - \underbrace{\eta_{\lambda\mu}h^{\mu\nu}}_{=-h^\nu_\lambda} + \underbrace{h_{\lambda\mu}\eta^{\mu\nu}}_{=h^\nu_\lambda} + \mathcal{O}(h^2). \tag{46.3}$$

Das Heben und Senken der Indizes geschieht dabei mit der Minkowski-Metrik. Die Feldgleichungen lassen sich nun in Ordnungen von h entwickeln, wobei diese in Klammern über der betrachteten Größe angegeben wird. Mit Satz (2.2) ist für das Christoffelsymbol, welches in nullter Ordnung verschwindet, in erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\sigma\ (1)}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\kappa}\left(\partial_\mu h_{\kappa\nu} + \partial_\nu h_{\kappa\mu} - \partial_\kappa h_{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial^\sigma h_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{46.4}$$

Mit Definition (5.7) ist für den Ricci-Tensor, der ebenfalls in nullter Ordnung verschwindet, in erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{(1)} &= \partial_\kappa \Gamma^{\kappa\ (1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa\ (1)}_{\mu\kappa} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}(\partial_{\kappa\mu}h_{\lambda\nu} + \partial_{\kappa\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa\lambda}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}h_{\kappa\lambda} - \partial_{\kappa\nu}h_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda\nu}h_{\kappa\mu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}(\partial_{\kappa\mu}h_{\lambda\nu} + \partial_{\lambda\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa\lambda}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}h_{\kappa\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\kappa\mu}h^\kappa_\nu + \partial_{\kappa\nu}h^\kappa_\mu - \Box h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}h).
\end{aligned} \tag{46.5}$$

Unter Benutzung der DeDonder-Eichung nach Satz (2.4) mit kovariantem Index lässt sich der Ricci-Tensor in erster Ordnung stark vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\eta_{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\Gamma^{\kappa\ (\leq 1)}_{\mu\nu} \propto \eta_{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu h^\kappa_\nu + \partial_\nu h^\kappa_\mu - \partial^\kappa h_{\mu\nu}\right) = 2\partial_\sigma h^\sigma_\lambda - \partial_\lambda h^\sigma_\sigma \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow R_{\mu\nu}{}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{46.6}$$

Kapitel 47

Störung des Gravitationsfeldes

Betrachtet wird eine kleine Störung des Gravitationsfeldes:

$$g_{\mu\nu} \to \widetilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad |\delta g_{\mu\nu}| < 1 \tag{47.1}$$

$$g^{\mu\nu} \to \widetilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad |\delta g_{\mu\nu}| > 1, \tag{47.2}$$

wobei das Minuszeichen begründet ist durch die Forderung, dass sich in erster Ordnung der Störung das Kronecker-Delta ergeben muss:

$$\widetilde{g}_{\lambda\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu} = (g_{\lambda\mu} + \delta g_{\lambda\mu})(g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}) = \delta^\nu_\lambda - \underbrace{g_{\lambda\mu}\delta g^{\mu\nu}}_{=-\delta g^\nu_\lambda} + \underbrace{\delta g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu}}_{=\delta g^\nu_\lambda} + \mathcal{O}(\delta g^2). \tag{47.3}$$

Das Heben und Senken der Indizes geschieht mit der Hintergrundmetrik.

47.1 Störung des Christoffelsymbols

Die Störung des Christoffelsymbols wird mit Satz (2.2) zu:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\kappa_{\mu\nu}[\widetilde{g}] &= \Gamma^\kappa_{\mu\nu}[g] + g^{\kappa\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu}[\delta g] - \delta g^{\kappa\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu}[g] + \mathcal{O}(\delta g^2) \\
&= \Gamma^\kappa_{\mu\nu}[g] + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}[g] g^{\kappa\sigma}\delta g_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \Gamma^\kappa_{\mu\nu}[g] + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\big(\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma} \\
&\quad - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\delta g_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta g_{\mu\sigma} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu}[g]\delta g_{\lambda\sigma}\big) + \mathcal{O}(\delta g^2) \\
&= \Gamma^\kappa_{\mu\nu}[g] + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\delta g^2) \\
&\overset{!}{=} \Gamma^\kappa_{\mu\nu}[g] + \delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta g^2),
\end{aligned} \tag{47.4}$$

also ist:

$$\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right). \tag{47.5}$$

Gemäß der Definition durch die kovarianten Differentiationen eines Tensors ist $\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ ebenso einer, das ergibt sich auch aus der Differenz der Christoffelsymbole zweier Metriken, wodurch sich der von ihnen unabhängige Inhomogenitätsterm bei der Transformation (2.16) herauskürzt.

47.2 Störung des Riemann–Christoffel-Krümmungstensors

Die Störung des Riemann–Christoffel-Krümmungstensors wird mit Definition (5.1) zu:

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}[\widetilde{g}] &= R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}[g] + \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}[g] + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}[g]\delta\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \\ &\quad - \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}[g] - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}[g]\delta\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} + \mathcal{O}(\delta g^2) \\ &\overset{!}{=} R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}[g] + \delta R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta g^2), \end{aligned} \tag{47.6}$$

also ist mit der kovarianten Differentiation:

$$\delta R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}. \tag{47.7}$$

Durch Kontraktion folgt direkt:

Korollar 47.1 (Palatini-Identität für Störungen)**.** *Für die Störung des Ricci-Tensors gilt die* Palatini-Identität*:*

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}) = \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu}). \tag{47.8}$$

Die Störung des Ricci-Tensors mit Gleichung (47.5) zu:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\Box\delta g_{\mu\nu} + \nabla^{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} + \nabla^{\lambda}\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\lambda}_{\lambda}\right). \tag{47.9}$$

Der nun auftauchende Wellenoperator deutet nun erstmals auf die Propagation der Störung als Welle hin. Die Störung des Ricci-Skalars wird mit Gleichung (5.8) zu:

$$\begin{aligned} R[\widetilde{g}] &= (g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu})(R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}) = R[g] + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}[g] + \mathcal{O}(\delta g^2) \\ &\overset{!}{=} R[g] + \delta R + \mathcal{O}(\delta g^2). \end{aligned} \tag{47.10}$$

Mit Gleichung (47.9) folgt:

$$\delta R = -\Box\delta g^{\lambda}_{\lambda} + \nabla^{\kappa}\nabla^{\lambda}\delta g_{\kappa\lambda} - R^{\kappa\lambda}[g]\delta g_{\kappa\lambda}. \tag{47.11}$$

47.3 Störung des Einstein-Tensors

Die Störung des Einstein-Tensors wird mit Definition (5.11) zu:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}[\widetilde{g}] &= R_{\mu\nu}[\widetilde{g}] - \frac{R[\widetilde{g}]}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu} = (R_{\mu\nu}[g] + \delta R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(R[g] + \delta R)(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) \\ &= R_{\mu\nu}[g] - \frac{R[g]}{2}g_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} - \frac{\delta R}{2}g_{\mu\nu} - \frac{R[g]}{2}\delta g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta g^2) \\ &=: G_{\mu\nu}[g] + \delta G_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta g^2) \end{aligned} \tag{47.12}$$

Mit den Gleichungen (47.9) und (47.11) folgt:

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big[&-\Box\delta g_{\mu\nu} + \nabla^{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} + \nabla^{\lambda}\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\lambda}_{\lambda} \\ &- \left(-\Box\delta g^{\lambda}_{\lambda} + \nabla^{\kappa}\nabla^{\lambda}\delta g_{\kappa\lambda} - R^{\kappa\lambda}[g]\delta g_{\kappa\lambda}\right) g_{\mu\nu} - R[g]\delta g_{\mu\nu}\big] \end{aligned} \tag{47.13}$$

Kapitel 48

Gravitationsstrahlung in einer nichtflachen Raumzeit

Eine kleine Störung des Gravitationsfeldes kann interpretiert werden als Gravitationsstrahlung in einer nichtflachen Raumzeit, beide im Vakuum jeweils beschrieben durch:

$$R_{\mu\nu}[g] = 0 \tag{48.1}$$

$$\delta G_{\mu\nu} = 0. \tag{48.2}$$

Letztere lässt sich mit einer verallgemeinerten DeDonder-Eichung, vergleiche mit Gleichung (46.6), vereinfachen. Mit einem Vektorfeld ξ sei diese:

$$g_{\kappa\sigma} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\xi_\sigma \Rightarrow 2\nabla^\lambda \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma \delta g^\lambda_\lambda = \xi_\sigma. \tag{48.3}$$

Daraus folgen:

$$\nabla_\mu \nabla^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \nabla^\lambda \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^\lambda_\lambda = \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \tag{48.4}$$

$$\nabla^\kappa \nabla^\lambda \delta g_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\Box \delta g^\lambda_\lambda + \frac{1}{2}\nabla^\lambda \xi_\lambda, \tag{48.5}$$

wobei die jeweiligen hinteren Terme für ein Killing-Vektorfeld verschwinden, siehe Gleichung (6.1). Bei der ersten Gleichung wurde benutzt, dass kovariante Ableitungen bei der Anwendung auf Skalare kommutieren. Da sie es jedoch bei Tensoren im Allgemeinen nicht tun, muss sie vor dem Einsetzen in Gleichung (47.13) noch modifiziert werden. Mit Satz (5.3) und den Gleichungen (5.12) und (5.13) ist:

$$\begin{aligned}
&[\nabla^\lambda, \nabla_\mu]\delta g_{\lambda\nu} + [\nabla^\lambda, \nabla_\nu]\delta g_{\lambda\mu} \\
=& - g^{\kappa\lambda}\left(R^\sigma_{\lambda\kappa\mu}[g]\delta g_{\sigma\nu} + R^\sigma_{\nu\kappa\mu}[g]\delta g_{\lambda\sigma} + R^\sigma_{\lambda\kappa\nu}[g]\delta g_{\sigma\mu} + R^\sigma_{\mu\kappa\nu}[g]\delta g_{\lambda\sigma}\right) \\
=& R_{\mu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\nu - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}[g]\delta g^\sigma_\lambda + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\mu - R^\lambda_{\nu\sigma\mu}[g]\delta g^\sigma_\lambda \\
=& \left(-R^\lambda_{\mu\sigma\nu}[g] + R^\lambda_{\mu\nu\sigma}[g] + R^\lambda_{\sigma\mu\nu}[g]\right)\delta g^\sigma_\lambda + R_{\mu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\nu + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\mu \\
=& -2R^\lambda_{\mu\sigma\nu}[g]\delta g^\sigma_\lambda + \underbrace{R_{\rho\sigma\mu\nu}[g]\delta g^{\rho\sigma}}_{=0} + R_{\mu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\nu + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\mu
\end{aligned} \tag{48.6}$$

Zu Gleichung (48.4) dazuaddiert ergibt:

$$\nabla^\lambda \nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^\lambda_\lambda = -2R^\lambda_{\mu\sigma\nu}[g]\delta g^\sigma_\lambda + R_{\mu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\nu + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^\sigma_\mu + \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \tag{48.7}$$

Dies und Gleichung (48.5) eingesetzt in die Störung des Einstein-Tensors nach Gleichung (47.13) ergibt:

$$\begin{aligned}\delta G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Bigg[- \Box\delta g_{\mu\nu} - 2R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}[g]\delta g^{\sigma}_{\lambda} + R_{\mu\sigma}[g]\delta g^{\sigma}_{\nu} + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^{\sigma}_{\mu} + \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2}\Box\delta g^{\lambda}_{\lambda} - R^{\kappa\lambda}[g]\delta g_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\nabla^{\lambda}\xi_{\lambda}\right) g_{\mu\nu} - R[g]\delta g_{\mu\nu}\Bigg] \\ &= \frac{1}{2}\Bigg[- \Box\left(\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g^{\sigma}_{\sigma} g_{\mu\nu}\right) - 2R_{\kappa\mu\lambda\nu}[g]\left(\delta g^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}\delta g^{\sigma}_{\sigma} g^{\kappa\lambda}\right) \\ &\quad - R_{\mu\nu}[g]\delta g^{\sigma}_{\sigma} + R_{\mu\sigma}[g]\delta g^{\sigma}_{\nu} + R_{\nu\sigma}[g]\delta g^{\sigma}_{\mu} - R^{\kappa\lambda}[g]\delta g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - R[g]\delta g_{\mu\nu} \\ &\quad + \nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} + \frac{1}{2}\nabla^{\lambda}\xi_{\lambda} g_{\mu\nu}\Bigg]. \end{aligned} \tag{48.8}$$

Die vorletzte Zeile verschwindet im Vakuum aufgrund von Gleichung (48.1) und die letzte bei der Verwendung eines Killing-Vektorfeldes. Analog zur Dualität zwischen Ricci- und Einstein-Tensor sei:

$$\delta g'_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{\kappa\lambda}\delta g_{\kappa\lambda}) g_{\mu\nu}, \tag{48.9}$$

wobei dann $g^{\mu\nu}\delta g'_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ und umgekehrt:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{\kappa\lambda}\delta g'_{\kappa\lambda}) g_{\mu\nu}. \tag{48.10}$$

Damit ist die finale Gleichung zur Beschreibung von Gravitationsstrahlung in einem nichtflachen Vakuum gegeben durch:

$$\Box\delta g'_{\mu\nu} + 2R_{\kappa\mu\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda\prime} = 0. \tag{48.11}$$

Damit die Anwendung des Wellenoperators nicht in zu vielen Termen resultiert, wird als Ansatz ein konstanter Polarisationtensor verwendet:

$$\delta g'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\psi \tag{48.12}$$

$$\Box\psi = g^{\kappa\lambda}\partial_{\kappa\lambda}\psi - \Gamma^{\sigma}\partial_{\sigma}\psi = 0 \tag{48.13}$$

$$R_{\kappa\mu\lambda\nu}e^{\kappa\lambda} = 0 \tag{48.14}$$

$$R_{rtrt}e^{rr} + R_{\vartheta t\vartheta t}e^{\vartheta\vartheta} + R_{\varphi t\varphi t}e^{\varphi\varphi} = 0 \Rightarrow -\frac{r_{\mathrm{S}}}{r^3}e^{tt} + \frac{r_{\mathrm{S}}(r - r_{\mathrm{S}})}{2r^2}e^{\vartheta\vartheta} - \frac{r_{\mathrm{S}}(r_{\mathrm{S}} - r)}{2r^2}\sin(\vartheta)^2 e^{\varphi\varphi} = 0 \tag{48.15}$$

$$R_{rttr}e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt} = 0 \tag{48.16}$$

$$R_{\vartheta tt\vartheta}e^{\vartheta t} = 0 \Rightarrow e^{\vartheta t} = 0 \tag{48.17}$$

$$R_{\varphi tt\varphi}e^{\varphi t} = 0 \Rightarrow e^{\varphi t} = 0 \tag{48.18}$$

$$R_{trtr}e^{tt} + R_{\vartheta r\vartheta r}e^{\vartheta\vartheta} + R_{\varphi r\varphi r}e^{\varphi\varphi} = 0 \Rightarrow \tag{48.19}$$

$$R_{\vartheta rr\vartheta}e^{\vartheta r} = 0 \Rightarrow e^{\vartheta r} = 0 \tag{48.20}$$

$$R_{\varphi rr\varphi}e^{\varphi r} = 0 \Rightarrow e^{\varphi r} = 0 \tag{48.21}$$

$$R_{t\vartheta t\vartheta}e^{tt} + R_{r\vartheta r\vartheta}e^{rr} + R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta}e^{\varphi\varphi} = 0 \tag{48.22}$$

$$R_{\varphi\vartheta\vartheta\varphi}e^{\varphi\vartheta} = 0 \Rightarrow e^{\varphi\vartheta} = 0 \tag{48.23}$$

$$R_{t\varphi t\varphi}e^{tt} + R_{r\varphi r\varphi}e^{rr} + R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi}e^{\vartheta\vartheta} = 0 \tag{48.24}$$

Literaturverzeichnis

[1] K. Schwarzschild; *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*; https://arxiv.org/abs/physics/9905030

[2] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory*, https://arxiv.org/abs/physics/9912033

[3] XXXX

[4] J.L. Hernandez-Pastora, L. Herrera; *Interior solution for the Kerr metric*; https://arxiv.org/abs/1701.02098

[5] XXXX