

Topologie

Skript geschrieben von Samuel Adrian Antz,
veröffentlicht und frei verfügbar auf:

<https://www.samueladrianantz.com/de/scripts/topo.pdf>

<https://gitlab.com/samueladrianantz/public/tree/main/topo.pdf>

30. Januar 2024

Über die Topologie

Die Topologie

Die Topologie ist die Grundlage weiterführender mathematischer Teilgebiete, wie etwa der **Algebraischen Topologie** und der **Geometrischen Topologie**. In der Algebraischen Topologie werden algebraische Methoden und Strukturen zur Lösung topologischer Probleme verwendet. In der geometrischen Topologie werden spezielle topologische Räume untersucht, welche Mannigfaltigkeiten genannt werden. Eine abstraktere Verallgemeinerung des letzteren Gebietes ist die **Differentialtopologie**.

Das erste Kapitel

Inhaltsverzeichnis

I	Euklidische und unitäre Vektorräume	9
1	Skalarprodukte	10
2	Spektralsatz	13
3	Cauchy–Schwarz-Ungleichung	14
II	Normierte Vektorräume	15
4	Normen	16
5	Folgen in normierten Räumen	18
5.1	Punktfolgen in normierten Räumen	18
5.2	Funktionenfolgen in normierten Räumen	18
6	Stetigkeit in normierten Räumen	19
6.1	Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit	19
6.2	Gleichmäßige Stetigkeit in normierten Räumen	19
6.3	Lipschitz-Stetigkeit in normierten Räumen	19
6.4	Hölder-Stetigkeit in normierten Räumen	20
7	Äquivalenz von Normen	21
III	Metrische Räume	22
8	Metriken	23
9	Inneres, Abschluss und Rand in metrischen Räumen	25
9.1	Offene Mengen	25
9.2	Abgeschlossene Mengen	26
10	Dichte und seperable metrische Räume	28
11	Distanz	29
12	Beschränktheit	30
13	Kompaktheit in metrischen Räumen	32
13.1	Satz von Heine–Borel	33

14 Diskrete metrische Räume	34
15 Folgen in metrischen Räumen	35
15.1 Punktfolgen in metrischen Räumen	35
15.2 Funktionenfolgen in metrischen Räumen	35
16 Vererbungssätze	36
17 Stetigkeit in metrischen Räumen	38
17.1 Punktweise Stetigkeit in metrischen Räumen	38
17.2 Gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen	39
17.3 Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen	39
17.4 Hölder-Stetigkeit in metrischen Räumen	40
18 Kontraktionen	42
18.1 Banachscher Fixpunktsatz	42
18.2 Satz von Bessaga	43
19 Äquivalenz von Metriken	44
20 Geodäten in metrischen Räumen	45
21 Vervollständigung metrischer Räume	46
22 Hausdorff-Distanz	47
IV Uniforme Räume	48
23 Nachbarschaften	49
24 Cauchyfilter- und netze	50
V Grundlegende Topologie	51
25 Spezielle Topologien	52
25.1 Teilraumtopologie	53
25.2 Quotiententopologie	53
26 Spezielle topologische Räume	54
26.1 Hausdorff-Räume	54
26.2 Reguläre Räume	54
26.3 Normale Räume	54
27 Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen	55
27.1 Stetige Abbildungen	55
27.2 Offene Abbildungen	56
27.3 Abgeschlossene Abbildungen	57

28	Induzierte und koinduzierte Topologie	59
28.1	Induzierte Topologie	59
28.2	Koinduzierte Topologie	61
29	Produkt- und Koprodukttopologie	63
29.1	Produkttopologie	63
29.2	Koprodukttopologie	64
30	Topologische Operationen	65
30.1	Inneres	65
30.2	Abschluss	66
30.3	Rand	69
31	Isolierte Punkte und Häufungspunkte	72
32	Umgebungen	73
33	Zusammenhängende Räume	74
33.1	Global zusammenhängende Räume	76
33.2	Zusammenhangskomponenten	77
33.3	Wegzusammenhangskomponenten	77
33.4	Lokal (weg)zusammenhängende Räume	78
33.5	Schwach lokal (weg)zusammenhängende Räume	80
33.6	Hyperzusammenhängende Räume	80
33.7	Ultrazusammenhängende Räume	81
34	Kombination von offenen und abgeschlossenen Mengen	82
34.1	G_δ - und F_σ -Mengen	82
34.2	Lokal abgeschlossene Teilmengen und (schwach) submaximale Räume . . .	83
34.3	Konstruierbare Teilmengen	84
35	Metrisierbarkeit	85
35.1	G_δ -Satz von Hausdorff und Satz von Mazurkiewicz	85
35.2	Satz von Bing–Nagata–Smirnov	86
35.3	Metrisierbarkeitssatz von Smirnov	86
35.4	Metrisierbarkeitssatz von Urysohn	86
36	Abzählbarkeitsaxiome	87
36.1	Erstes Abzählbarkeitsaxiom	87
36.2	Zweites Abzählbarkeitsaxiom	88
37	Dichte topologische Räume	89
37.1	Blumberg-Räume	89
37.2	Seperable Räume	90
37.3	Polnische Räume	90
37.4	Baire-Räume	90
38	Folgen in topologischen Räumen	91
39	Filter in topologischen Räumen	93

40 Netze in topologischen Räumen	94
41 Homöomorphismen	95
41.1 Lokale Homöomorphismen	97
42 Kompakt-Offen-Topologie (KO-Topologie)	98
43 Topologie der Sphären	99
43.1 Satz von Borsuk–Ulam	99
43.2 Satz von Poincaré–Bohl	100
43.3 Satz von Poincaré–Brouwer	100
43.4 Fixpunktsatz von Brouwer	100
43.5 Satz von Kakutani–Yamabe–Yujobô	101
43.6 Satz von Dyson–Yang	101
44 Topologie der Tori	102
45 Topologische Gruppen	103
45.1 Zusammen- und Wegzusammenhangskomponenten topologischer Gruppen .	104
45.2 Homeo als Funktor	105
VI Kompaktheit	106
46 Überdeckungen	107
47 Kompaktheit und Folgenkompaktheit	109
47.1 Kompaktheit	109
47.2 Folgenkompaktheit	110
47.3 Satz von Tychonoff	111
48 Kompakte und eigentliche Abbildungen	112
48.1 Kompakte Abbildungen	112
48.2 Eigentliche Abbildungen	112
49 Weitere Arten von Kompaktheit	114
49.1 Relative (Folgen)kompaktheit	114
49.2 σ -Kompaktheit	114
50 Metakompaktheit	115
50.1 Lokale Metakompaktheit	115
50.2 Schwache lokale Metakompaktheit	116
51 Parakompaktheit	117
51.1 Lokale Parakompaktheit	118
51.2 Schwache lokale Parakompaktheit	118
52 Orthokompaktheit	119
52.1 Lokale Orthokompaktheit	120
52.2 Schwache lokale Orthokompaktheit	120

53 Hemikompaktheit	121
53.1 Lokale Hemikompaktheit	122
53.2 Schwache lokale Hemikompaktheit	123
54 Lokalkompaktheit	124
54.1 Lindelöf-Raum	125
54.2 Erschöpfung durch kompakte Teilmengen	126
55 Alexandroff-Kompaktifizierung	127
56 Stone–Čech-Kompaktifizierung	129
56.1 Konstruktion über Ultrafilter	130
57 Bohr-Kompaktifizierung	131
VII Topologische Kategorien	132
58 Kategorie der topologischen Räume	133
58.1 Kategorie der punktierten topologischen Räume	133
58.2 Kategorie der kompakten topologischen Räume	133
59 Kategorie der Hausdorff-Räume	134
59.1 Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume	134
59.2 Kategorie der schwachen Hausdorff-Räume	134
60 Kategorie der kompakt generierten topologischen Räume	135
60.1 Kategorie der kompakt generierten Hausdorff-Räume	135
60.2 Kategorie der kompakt generierten schwachen Hausdorff-Räume	136
VIII Fortgeschrittene Topologie	137
61 Pseudokompaktheit und stark zusammenhängende Räume	138
62 H-abgeschlossene und KC-Räume	139
62.1 H-abgeschlossene Räume	139
62.2 Katětovsche und Fominische H-abgeschlossene Erweiterung	139
62.3 KC-Räume	139
63 k-Räume	140
63.1 k-Funktor (Kelleyfizierung)	141
63.2 Modellstruktur auf \mathbf{cgTop}	141
64 Schwache Hausdorff-Räume	142
64.1 h-Funktor	142
64.2 Modellstruktur auf $\mathbf{cgwHaus}$	142
65 Δ-generierte Räume	143
65.1 d-Funktor	143
65.2 Modellstruktur auf \mathbf{DTop}	143

66 Diffeologische Räume	144
66.1 Diffeologische Topologie (D-Topologie)	144
66.2 Modellstruktur auf Difflog	144
67 Glatte Abbildungen und Diffeomorphismen	145
68 Induzierte und koinduzierte Diffeologie	146
68.1 Induzierte Diffeologie	146
68.2 Kodinduzierte Diffeologie	146
69 Induktionen und Subduktionen	147
IX Trennungsaxiome	148
70 Kolmogoroff-Räume (T_0-Räume)	149
70.1 Kolmogoroff-Quotient	149
71 Fréchet-Topologie (T_1-Räume)	151
72 Hausdorff-Räume (T_2-Räume)	152
72.1 Satz von Tamano	154
72.2 Irreduzible Räume	155
72.3 Krulldimension	155
72.4 Hausdorffifizierung	155
72.5 Lokale Hausdorff-Räume	156
73 Kontinua	157
73.1 Satz von Hahn–Mazurkiewicz	157
74 Reguläre Räume	158
74.1 Lokal reguläre Räume	159
75 Normale Räume (T_4-Räume)	160
75.1 Lemma von Urysohn	160
75.2 Fortsetzungssatz von Tietze	161
75.3 Interpolationssatz von Katětov	161
75.4 Dieudonné-Theorem	161
75.5 Lokal normale Räume	161
X Topologische Dimensionen	163
76 Lebesguesche Überdeckungsdimension	164
77 Induktive Dimensionen	165
77.1 Kleine induktive Dimension	165
77.2 Große induktive Dimension	165
78 Rényi-Dimension	167

XI	Anhang	168
XII	Notizen	169
79	Conn- und PConn-Funktor	170
80	LocConn- und LocPConn-Funktor	171
81	Wallmann–Shanin-Kompaktifizierung	172
82	Symmetrischer Raum (R_0 -Raum)	173
83	Präregulärer Raum (R_1 -Raum)	174
84	Urysohn-Raum	175
85	Regulärer Hausdorff-Raum (T_3 -Raum)	176
86	Vollständiger regulärer Raum	177
87	Tychonoff-Raum (T_{312} -Raum)	178
88	Vollständiger normaler Raum	179
89	Vollständiger normaler Hausdorff-Raum (T_5 -Raum)	180
90	Perfekt normaler Raum	181
91	Perfekt normaler Hausdorff-Raum (perfekter T_4 -Raum)	182
92	Spezielle topologische Räume	183
92.1	Lange Linie	183
92.2	Topologischer Kamm	183
92.3	Hawaiianische Ohrringe	183
92.4	Warschauer Sinuskurve	183
92.5	Warschauer Kreis	183

Teil I

Euklidische und unitäre Vektorräume

Kapitel 1

Skalarprodukte

Definition 1.1 (Reelles Skalarprodukt). Für einen reellen Vektorraum V ist eine Abbildung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle, \quad (1.1)$$

für die:

I.) Linearität:

$$\forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}} \forall_{v, w_1, w_2 \in V} : \langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle \quad (1.2)$$

II.) Hermitizität:

$$\forall_{v, w \in V} : \langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle \quad (1.3)$$

III.) Definitheit:

$$\forall_{v \in V} : \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (1.4)$$

ein (reelles) Skalarprodukt.

Der Vektorraum V wird mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu einem *euklidischen Raum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Definition 1.2 (Komplexes Skalarprodukt). Für einen komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle, \quad (1.5)$$

für die:

I.) Linearität:

$$\forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}} \forall_{v_1, v_2, w \in V} : \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle \quad (1.6)$$

II.) Hermitizität:

$$\forall_{v, w \in V} : \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad (1.7)$$

III.) Definitheit:

$$\forall_{v \in V} : \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (1.8)$$

ein (komplexes) Skalarprodukt.

Der Vektorraum V wird mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu einem *unitären Vektorraum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Lemma 1.3. *Für euklidische bzw. unitäre Vektorräume $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ und einen Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi^* \in \text{Hom}(W, V)$, den zu φ adjungierten Homomorphismus, für den:*

$$\forall_{v \in V} \forall_{w \in W} : \langle \varphi(v), w \rangle_W = \langle v, \varphi^*(w) \rangle_V \quad (1.9)$$

Beweis. XXXX □

Lemma 1.4. *Für euklidische bzw. unitäre Vektorräume V, W mit jeweiligen Basen \mathcal{B}, \mathcal{C} und einen Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ist:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi^*)^T \quad \text{bzw.} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi^*)^H \quad (1.10)$$

Beweis. Seien $n = \dim V$ und $m = \dim W$ sowie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ □

Ein Homomorphismus $\varphi: V \rightarrow W$ mit $\varphi^* = \varphi^{-1}$ wird *unitär* oder für reelle Vektorräume auch *orthogonal* genannt. Ein Endomorphismus $\varphi \in \text{End}(V)$ mit $\varphi^* = \varphi$ wird *selbstadjungiert* und einer mit $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$ wird *normal* genannt. Offenbar sind unitäre Endomorphismen normal.

Korollar 1.5. *Für unitäre Vektorräume V, W mit jeweiligen Basen \mathcal{B}, \mathcal{C} und einen unitären Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi^*)^H = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\varphi^{-1})^H = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)^{-H} \quad (1.11)$$

Die darstellende Matrix eines unitären Homomorphismus ist also unitär.

Korollar 1.6. *Für einen unitären Vektorraum V mit Basis \mathcal{B} und einen Endomorphismus $\varphi \in \text{End}(V)$ ist:*

I.) *falls dieser selbstadjungiert ist:*

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)^H = M_{\mathcal{B}}(\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad (1.12)$$

II.) *falls dieser normal ist:*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(\varphi)^H &= M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \varphi^*) \\ &= M_{\mathcal{B}}(\varphi^* \circ \varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi^*)M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^H M_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die darstellende Matrix eines selbstadjungierten Endomorphismus ist also selbstadjungiert (hermitisch) und die eines normalen ist normal.

Lemma 1.7. *Für euklidische bzw. unitäre Vektorräume $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U), (V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ und Homomorphismen $f \in \text{Hom}(V, W), g \in \text{Hom}(U, V)$ ist:*

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \quad (1.14)$$

Beweis. Es ist:

$$\begin{aligned}\forall u \in U, w \in W: \langle u, (f \circ g)^*(w) \rangle_U &= \langle (f \circ g)(u), w \rangle_W \\ &= \langle g(u), f^*(w) \rangle_V = \langle u, (g^* \circ f^*)(w) \rangle_U\end{aligned}\quad (1.15)$$

womit $\forall w \in W: (f \circ g)^*(w) = (g^* \circ f^*)(w)$ und $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. \square

Lemma 1.8. Für euklidische bzw. unitäre Vektorräume V, W und einen Homomorphismus $f \in \text{Hom}(V, W)$ ist:

$$\text{img}(f) = \ker(f^*)^\perp \quad (1.16)$$

Insbesondere ist auch:

$$W = \text{img}(f) \oplus \ker(f^*) \quad (1.17)$$

Beweis. \square

Kapitel 2

Spektralsatz

Satz 2.1 (Spektralsatz). *Für einen endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitären Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ existiert genau dann eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von diesem, wenn er normal ist und alle Eigenwerte in \mathbb{R} liegen, falls der Vektorraum euklidisch ist.*

Beweis.

□

Korollar 2.2. *Hermitische und damit insbesondere symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.*

Kapitel 3

Cauchy–Schwarz-Ungleichung

Satz 3.1 (Cauchy–Schwarze Ungleichung). *Für einen euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und Vektoren $x, y \in V$ gilt die Cauchy–Schwarz-Ungleichung:*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (3.1)$$

Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung ist unter anderem essentiell für die Herleitung der Heisenbergschen Unschärferelation in der Quantenmechanik.

Beweis.

$$\begin{aligned} \left\langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle &= \langle u, u \rangle - \left\langle u, \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle - \left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, u \right\rangle + \left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^*}{\langle v, v \rangle} \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle u, v \rangle^* + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2 \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \\ &= \langle u, u \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \stackrel{!}{\geq} 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

□

Teil II

Normierte Vektorräume

Kapitel 4

Normen

Definition 4.1 (Norm). Für einen Körper \mathbb{K} und einen \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine Abbildung:

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \|x\|, \quad (4.1)$$

für die:

I.) *Definitheit*: $\forall_{x \in V} : \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

II.) *Absolute Homogenität*: $\forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \forall_{x \in V} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

III.) *Dreiecksungleichung*: $\forall_{x, y \in V} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

eine Norm auf V .

Der Vektorraum V wird mit der Norm $\|\cdot\|$ zu einem *normierten Raum* $(V, \|\cdot\|)$.

Satz 4.2. Ein Skalarprodukt induziert eine Norm durch:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (4.2)$$

Ein euklidischer Raum wird damit zu einem normierten Raum.

Mit dieser induzierten Norm lässt sich die Cauchy–Schwarz–Ungleichung nach Satz (3.1) auf Seite 14 durch Wurzelziehen einfacher ausdrücken als:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (4.3)$$

Beweis. □

Definition 4.3 (Isometrische Isomorphie). Zwei normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ für die es einen Isomorphismus $\phi: X \rightarrow Y$ gibt, für den:

$$\forall_{x \in X} : \|\phi(x)\|_Y = \|x\|_X \quad (4.4)$$

sind isometrisch isomorph.

Definition 4.4 (Konforme Abbildung). Für euklidische Räume $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit:

$$\forall_{u,v \in V} : \frac{\langle f(u), f(v) \rangle_W}{\|f(u)\|_W \|f(v)\|_W} = \frac{\langle u, v \rangle_V}{\|u\|_V \|v\|_V} \quad (4.5)$$

und $\det(f) > 0$ eine konforme Abbildung. $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ sind die von $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ induzierte Normen.

Ist $\det(f) < 0$ ist f eine antikonforme Abbildung.

Lemma 4.5. Für eine konforme oder antikonforme Abbildung $f: V \rightarrow W$ gilt:

$$\forall_{u,v \in U} : \|u\| = \|v\| \Rightarrow \|f(u)\| = \|f(v)\|. \quad (4.6)$$

Beweis. Seien $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\|$, dann ist:

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_W^2 - \|f(v)\|_W^2 &= \langle f(u) - f(v), f(u) + f(v) \rangle_W = \langle f(u - v), f(u + v) \rangle_W \\ &\propto \langle u - v, u + v \rangle_W = \|u\|_V^2 - \|v\|_V^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

□

Kapitel 5

Folgen in normierten Räumen

5.1 Punktfolgen in normierten Räumen

Definition 5.1 (Konvergenz in normierten Räumen). *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem normierten Raum X , für die es einen Punkt $x \in X$ gibt mit:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall N > n : \|x_N - x\|_X < \varepsilon \quad (5.1)$$

ist konvergent gegen x .

Definition 5.2 (Banachraum). *Ein normierter Raum in dem jede Cauchyfolge konvergiert ist vollständig und wird als Banachraum bezeichnet.*

5.2 Funktionenfolgen in normierten Räumen

Definition 5.3 (Punktweise Konvergenz, normierte Räume). *Für normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \rightarrow Y$ und eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, für die:*

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall N > n : \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon \quad (5.2)$$

konvergiert f_n punktweise gegen f , notiert als $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pkt..

Definition 5.4 (Gleichmäßige Konvergenz, normierte Räume). *Für normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \rightarrow Y$ und eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, für die:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall N > n \forall x \in X : \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon \quad (5.3)$$

konvergiert f_n gleichmäßig gegen f , notiert als $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ glm..

Korollar 5.5. *Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen konvergieren punktweise.*

Lemma 5.6. *Für normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \rightarrow Y$ und eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ glm.} \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.4)$$

Kapitel 6

Stetigkeit in normierten Räumen

6.1 Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit

Definition 6.1 (Stetigkeit in normierten Räumen). *Eine lineare Abbildung $f: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwischen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, für die:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : \|x - x'\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon \quad (6.1)$$

ist stetig im Punkt $x \in X$.

Das verallgemeinert die Definition (??) im Skript Funktionalanalysis, die hier im Spezialfall des Betrags als Norm enthalten ist.

6.2 Gleichmäßige Stetigkeit in normierten Räumen

Definition 6.2 (Gleichmäßige Stetigkeit in normierten Räumen). *Eine lineare Abbildung $f: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwischen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ für die:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : \|x - x'\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon \quad (6.2)$$

ist gleichmäßig stetig.

Das verallgemeinert die Definition (??) im Skript Funktionalanalysis, die hier im Spezialfall des Betrags als Norm enthalten ist.

6.3 Lipschitz-Stetigkeit in normierten Räumen

Definition 6.3 (Lipschitz-Stetigkeit in normierten Räumen). *Eine lineare Abbildung $f: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwischen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, für die:*

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall x, x' \in X : \|f(x) - f(x')\|_Y < L \|x - x'\|_X \quad (6.3)$$

ist lipschitzstetig mit der Lipschitz-Konstanten L .

Das verallgemeinert die Definition (??) im Skript Funktionalanalysis, die hier im Spezialfall des Betrags als Norm enthalten ist.

Eine lipschitzstetige Abbildung mit $L < 1$ ist eine *Kontraktion* des normierten Raumes.

6.4 Hölder-Stetigkeit in normierten Räumen

Definition 6.4 (Hölder-Stetigkeit in normierten Räumen). *Eine Abbildung $f: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwischen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, für die:*

$$\exists_{L \in \mathbb{R}^+} \exists_{\alpha \in (0,1]} \forall_{x, x' \in X} : \|f(x) - f(x')\|_Y < L \|x - x'\|_X^\alpha \quad (6.4)$$

ist hölderstetig zum Hölderexponenten α (oder α -hölderstetig).

Das verallgemeinert die Definition (??) im Skript Funktionalanalysis, die hier im Spezialfall des Betrags als Norm enthalten ist und es verallgemeinert die Definition (6.3) der Lipschitz - Stetigkeit in normierten Räumen, die hier im Spezialfall $\alpha = 1$ enthalten ist.

Kapitel 7

Äquivalenz von Normen

Definition 7.1 (Äquivalente Normen). Für einen Vektorraum X werden zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf diesem, für die:

$$\exists_{c,C \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in X} : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad (7.1)$$

äquivalent genannt.

Offenbar ist die Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation¹.

Satz 7.2. Auf dem \mathbb{K}^n sind alle Normen äquivalent.

Damit sind unabhängig von der betrachteten Norm immer die gleichen Mengen offen und abgeschlossen.

Beweis. □

Satz 7.3. Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis. □

¹siehe Definition (??) im Skript *Mengenlehre*

Teil III
Metrische Räume

Kapitel 8

Metriken

Ein metrischer Raum ist eine Menge, die mit einer *Metrik*, einer Abbildung mit bestimmten Eigenschaften, versehen ist. Das Konzept der metrischen Räume verallgemeinert das Konzept der normierten Räume, da jeder normierte Raum auch als metrischer Raum betrachtet werden kann. Die Umkehrung gilt nicht, da metrische Räume nicht unbedingt Vektorräume sein müssen.

Definition 8.1 (Pseudometrik). *Für eine Menge M ist eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, für die:*

I.) *Definitheit:* $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

II.) *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$

III.) *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

eine Pseudometrik.

Die Menge M wird mit der Pseudometrik d zu einem *pseudometrischen Raum* (M, d) .

Definition 8.2 (Quasimetrik). *Für eine Menge M ist eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, für die:*

I.) *Definitheit:* $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

II.) *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

eine Quasimetrik.

Die Menge M wird mit der Quasimetrik d zu einem *quasimetrischen Raum* (M, d) .

Definition 8.3 (Metrik). *Für eine Menge M ist eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, für die:*

I.) *Definitheit:* $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

II.) *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$

III.) *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

eine Metrik.

Im Gegensatz zu Pseudometrik gilt für die Metrik sogar Äquivalenz bei der Definitheit. Jede Metrik ist insbesondere eine Pseudo- und Quasimetrik. Die Menge M wird mit der Metrik d zu einem *metrischen Raum* (M, d) .

Lemma 8.4. Für eine Menge M induziert eine Quasimetrik d eine Metrik d' durch:

$$\forall x, y \in M: d'(x, y) = \frac{1}{2} (d(x, y) + d(y, x)) \quad (8.1)$$

Beweis. □

Definition 8.5 (Ultrametrik). Für eine Menge M ist eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, für die:

I.) *Definitheit:* $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

II.) *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$

III.) *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$

eine Ultrametrik.

Jede Ultrametrik ist insbesondere eine Metrik. Die Menge M wird mit der Ultrametrik d zu einem *ultrametrischen Raum* (M, d) .

Satz 8.6. Eine Norm induziert eine Metrik durch:

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (8.2)$$

Ein normierter Raum wird damit zu einem metrischen Raum. Die von der 1-Norm induzierte Metrik wird *Manhattan-Metrik* genannt.

Beweis.

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (8.3)$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x) \quad (8.4)$$

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z) \quad (8.5)$$

□

Kapitel 9

Inneres, Abschluss und Rand in metrischen Räumen

Definition 9.1 (Kugeln). Für einen metrischen Raum (M, d) sind die Abbildungen:

$$B: M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{P}(M), B(x, r) := \{y \in M \mid d(x, y) < r\} \quad (9.1)$$

$$\bar{B}: M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{P}(M), \bar{B}(x, r) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\} \quad (9.2)$$

die offene bzw. abgeschlossene Kugel um den Punkt x mit Radius r .

9.1 Offene Mengen

Definition 9.2 (Offene Menge). Eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) für die:

$$\forall x \in \Omega \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega \quad (9.3)$$

wird offen genannt.

Alle Punkte einer offenen Menge sind also nur von anderen Punkten dieser Menge umgeben. Aus der Definition folgt direkt, dass \emptyset und der metrische Raum M selbst offen sind.

Definition 9.3 (Abgeschlossene Menge). Eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) , für die $\Omega^c \subseteq M$ offen ist, wird abgeschlossen genannt.

Beispiel 9.4. \emptyset und M sind offen und abgeschlossen.

Lemma 9.5. Die offene Kugel ist tatsächlich offen.

Beweis. Seien (M, d) ein metrischer Raum und $x \in M$ sowie $r > 0$ beliebig. Sei $y \in \bar{B}(x, r)$ beliebig, dann ist $d(x, y) < r$, womit $r - d(x, y) > 0$ und mit der Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ folgt:

$$\begin{aligned} B(y, r - d(x, y)) &= \{z \in M \mid d(y, z) < r - d(x, y) \Leftrightarrow d(x, y) + d(y, z) < r\} \\ &\subseteq \{z \in M \mid d(x, z) < r\} = B(x, r). \end{aligned} \quad (9.4)$$

□

Lemma 9.6. Die abgeschlossene Kugel ist tatsächlich abgeschlossen.

Beweis. Seien (M, d) ein metrischer Raum und $x \in M$ sowie $r > 0$ beliebig. Sei $y \in \overline{B}(x, r)^c$ beliebig, dann ist $d(x, y) > r$, womit $d(x, y) - r > 0$ und mit der Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ folgt:

$$\begin{aligned} B(y, d(x, y) - r) &= \{z \in M \mid d(y, z) < d(x, y) - r\} \\ &\subseteq \{z \in M \mid d(x, z) > r\} = \overline{B}(x, r)^c. \end{aligned} \quad (9.5)$$

□

Satz 9.7. *Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.*

Beweis. Sei M ein metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen mit I endlich. Sei $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ beliebig, dann:

$$\forall i \in I \exists \varepsilon_i > 0: B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i \Rightarrow \exists \varepsilon = \min_{i \in I} \varepsilon_i: B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad (9.6)$$

womit $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen ist. □

Da $\min_{i \in I} \varepsilon > 0$ mit $\forall i \in I: \varepsilon_i > 0$ für I abzählbar unendlich nicht unbedingt gilt, ist der Schnitt abzählbar unendlich vieler offener Mengen tatsächlich nicht unbedingt offen:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\} \quad (9.7)$$

Satz 9.8. *Die Vereinigung abzählbar unendlich vieler offener Mengen ist wieder offen.*

Beweis. Sei M ein metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen mit I abzählbar unendlich. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig, dann:

$$\exists_{i \in I} x \in U_i \Rightarrow \exists_{\varepsilon > 0} B(x, \varepsilon) \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad (9.8)$$

womit $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen ist. □

Definition 9.9 (Inneres). *Für eine Teilmenge $\Omega \subset M$ eines metrischen Raumes (M, d) ist:*

$$\Omega^\circ := \{x \in \Omega \mid \exists_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) \subset \Omega\} \quad (9.9)$$

ihre Inneres.

Korollar 9.10. *Das Innere einer Menge ist offen.*

9.2 Abgeschlossene Mengen

Definition 9.11 (Abgeschlossene Menge). *Eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) für die Ω^c offen ist ist abgeschlossen.*

Aus der Definition folgt direkt, dass \emptyset und der metrische Raum M selbst abgeschlossen sind. Mengen wie diese, die offen und abgeschlossen sind werden *abgeschlossene* Mengen genannt.

Lemma 9.12. *Die abgeschlossenen Kugeln sind tatsächlich abgeschlossen.*

Beweis. □

Durch Komplementbildung der Sätze (9.7) und (9.8) folgt:

Korollar 9.13. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Korollar 9.14. *Der Schnitt abzählbar unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Definition 9.15 (Abschluss). *Für einen metrischen Raum (M, d) und eine Teilmenge $\Omega \subset M$ ist:*

$$\bar{\Omega} := \left\{ x \in M \mid \forall_{\varepsilon > 0} : B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \right\} \quad (9.10)$$

ihr Abschluss.

Korollar 9.16. *Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.*

Lemma 9.17. *Für einen metrischen Raum (M, d) und eine Teilmenge $\Omega \subset M$ ist:*

$$\bar{\Omega} := \left\{ x \in M \mid \exists_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \quad (9.11)$$

Beweis. \subseteq : Sei $x \in \bar{\Omega}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Folge mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{1/n}(x) \cap \Omega \neq \emptyset$, dann ist $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. \supseteq : Seien $x \in M$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in B_\varepsilon(x)$, womit $B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ und $x \in \bar{\Omega}$. □

Satz 9.18. *Für einen metrischen Raum (M, d) liegt eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ genau dann dicht in dieser, wenn $\bar{\Omega} = M$.*

Beweis. □

Lemma 9.19. *Abgeschlossene Untervektorräume von Banachräumen sind wieder Banachräume.*

Beweis. □

Kapitel 10

Dichte und seperable metrische Räume

Definition 10.1 (Dichte Teilmenge in metrischen Räumen). Für einen metrischen Raum (M, d) liegt eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$, für die:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists y \in \Omega : d(x, y) < \varepsilon \quad (10.1)$$

dicht in M .

Beispiel 10.2. \mathbb{N} und \mathbb{Z} liegen nicht dicht und \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} mit der vom Betrag induzierten Metrik.

Lemma 10.3. Für einen metrischen Raum (M, d) liegt eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ genau dann dicht in ihm, wenn $\overline{\Omega} = M$.

Beweis. □

Lemma 10.4. Bilder von dichten Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind dicht in deren Bild. Für eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen metrischen Räumen (M, d) und (N, d') sowie $\Omega \subseteq M$ dicht ist $f(\Omega) \subseteq f(M)$ dicht.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $y \in f(M)$ beliebig, dann gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ und aufgrund der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, sodass $\forall x' \in M: d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Da $\Omega \subseteq M$ dicht ist, gibt es ein $x' \in \Omega$ mit $d(x, x') < \delta$, womit $d(y, f(x')) = d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Da $f(x') \in f(\Omega)$ folgt die Behauptung. □

Satz 10.5 (Satz von Baire). Für einen vollständigen metrischen Raum (M, d) und eine Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offene dichte Teilmengen ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ eine offene dichte Teilmenge.

Beweis. □

Definition 10.6 (Seperabler metrischer Raum). Ein metrischer Raum, für den eine abzählbare dichte Teilmenge existiert, wird seperabel genannt.

\mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n sind mit der von der euklidischen Norm induzierten Metrik seperabel, da \mathbb{Q}^n bzw. $\mathbb{Q}(i)^n$ abzählbare dichte Teilmengen sind.

Lemma 10.7. Teilmengen seperabler metrischer Räume sind (mit der eingeschränkten Metrik) wieder seperabel.

Beweis. □

Kapitel 11

Distanz

Definition 11.1 (Distanz). Für einen metrischen Raum (M, d) sind die Abbildungen:

$$\text{dist}: M \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, (x, \Omega) \mapsto \text{dist}(x, \Omega) := \inf_{y \in \Omega} d(x, y) \quad (11.1)$$

$$\text{dist}: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, (\Omega_1, \Omega_2) \mapsto \text{dist}(\Omega_1, \Omega_2) := \inf_{x \in \Omega_1} \inf_{y \in \Omega_2} d(x, y) = \inf_{x \in \Omega_1} \text{dist}(x, \Omega_2) \quad (11.2)$$

die Distanz eines Punktes von einer Teilmenge bzw. die zweier Teilmengen voneinander.

Satz 11.2. Die Distanz eines Punktes zu einer Teilmenge ist genau dann null, wenn dieser im Abschluss der Teilmenge liegt:

$$x \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow \text{dist}(x, \Omega) = 0 \quad (11.3)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} x \in \bar{\Omega} &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} : B(x, \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{y \in \Omega} : y \in B(x, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{y \in \Omega} : d(x, y) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} : \text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow \text{dist}(x, \Omega) = 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

□

Kapitel 12

Beschränktheit

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\Omega \subseteq M$ eine Teilmenge.

Definition 12.1 (Radius). *Die Abbildung:*

$$\text{rad}: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{-\infty, \infty\}, \text{rad}(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega) \quad (12.1)$$

ist der Radius.

Insbesondere sind $\text{rad}(\emptyset) = -\infty$ und $\text{rad}(\Omega) = \infty$ wenn $\partial\Omega = \emptyset$. Das Supremum kann auch über alle Punkte aus $\overline{\Omega}$ genommen werden, womit es aufgrund der Stetigkeit der Distanz nach Lemma () sogar ein Maximum nach Lemma () ist.

Definition 12.2 (Mitte). *Die Teilmenge:*

$$\partial^*\Omega := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{rad}(\Omega)\} \quad (12.2)$$

ist die Mitte.

Nach Lemma () ist die Mitte abgeschlossen. Die Distanz zwischen Mitte und Rand ist genau der Radius:

$$\text{dist}(\partial^*\Omega, \partial\Omega) = \inf_{x \in \partial^*\Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{rad}(\Omega) \quad (12.3)$$

Definition 12.3 (Durchmesser). *Die Abbildung:*

$$\text{diam}: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{-\infty\}, \text{diam}(\Omega) := \sup_{x, y \in \Omega} d(x, y) \quad (12.4)$$

ist der Durchmesser.

Insbesondere ist $\text{diam}(\emptyset) = -\infty$. Ein metrischer Raum (M, d) für den $\text{diam}(M) < \infty$ wird *beschränkt* genannt. Für $\partial\Omega \neq \emptyset$ ist der Radius kleiner als der Durchmesser, da:

$$\text{rad}(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{y \in \partial\Omega} d(x, y) \leq \sup_{x, y \in \Omega} d(x, y) = \text{diam}(\Omega) \quad (12.5)$$

VERMUTUNG

Lemma 12.4. *Ist Ω wegzusammenhängend mit $\text{rad}(\Omega) < \infty$ sowie $f: \Omega \rightarrow \Omega$ stetig, dann:*

$$\exists_{x \in \Omega} : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(f(x), \partial\Omega) \quad (12.6)$$

Beweis. Seien $y \in \partial\Omega$ und $z \in \partial^*\Omega$ beliebig sowie $\gamma: [0; 1] \rightarrow \Omega \cup \{y\}$ stetig mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = z$, dann sind:

$$\text{dist}(-, \partial\Omega) \circ \gamma, \text{dist}(f(-), \partial\Omega) \circ \gamma: [0; 1] \rightarrow [0; \text{rad}(\Omega)] \quad (12.7)$$

stetig mit $(\text{dist}(-, \partial\Omega) \circ \gamma)(0) = \text{dist}(y, \partial\Omega) = 0$ und $(\text{dist}(-, \partial\Omega) \circ \gamma)(1) = \text{dist}(z, \partial\Omega) = \text{rad}(\Omega)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz eines $t \in [0; 1]$, sodass $\text{dist}(\gamma(t), \partial\Omega) = \text{dist}(f(\gamma(t)), \partial\Omega)$. \square

Kapitel 13

Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition 13.1 (Kompaktheit). *Für einen metrischen Raum (M, d) ist eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ für die jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine in Ω konvergente Teilfolge besitzt eine kompakte Menge (oder Kompaktum, Plural: Kompakta).*

Satz 13.2. *Ein Kompaktum ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Es sei (M, d) ein metrischer Raum mit $\Omega \subseteq M$ kompakt. Wäre Ω nicht beschränkt, wähle ein $x_0 \in \Omega$ beliebig und $\forall n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $d(x_0, x_n) \geq n$. Diese Folge konvergiert nicht, da wenn sie es täte, also $\exists \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(x_n, x_0) < \varepsilon$ gelten würde ebenso gilt:

$$n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x) + d(x, x_0) \leq \varepsilon + d(x, x_0) \quad (13.1)$$

Dies wird nicht erfüllt für $n > \varepsilon + d(x, x_0)$, womit (x_n) nicht konvergiert was ein Widerspruch zur vorausgesetzten Kompaktheit von Ω ist. \square

Die Umkehrung gilt dabei nicht unbedingt.

Satz 13.3. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist wieder ein Kompaktum.*

Beweis. Es sei (M, d) ein metrischer Raum mit $\Omega \subseteq M$ kompakt. Es sei $\Omega' \subseteq \Omega$ abgeschlossen. Es sei nun $(x_n) \subset \Omega'$ eine Folge. Da Ω kompakt ist, gibt es eine in Ω konvergente Teilfolge, die, da Ω' abgeschlossen ist, gegen einen Punkt in Ω' konvergiert. Damit ist auch Ω' abgeschlossen. \square

Satz 13.4. *Eine stetige Funktion bildet Kompakta auf Kompakta ab.*

Beweis. Es seien (M, d) und (M', d') metrische Räume mit $\Omega \subseteq M$ kompakt. Es sei $f : M \rightarrow M'$ stetig. Es sei (x'_n) eine Folge in $f[\Omega]$, dann gibt es eine entsprechende Folge (x_n) in Ω mit $f(x_n) = x'_n$. Diese konvergiert nun gegen ein $x \in \Omega$, da dieses kompakt ist und da f stetig ist konvergiert nun (x'_n) gegen $f(x) \in f[\Omega]$, womit dieses ebenso kompakt ist. \square

Definition 13.5 (Offene Überdeckung). *Für einen metrischen Raum M ist eine Familie $(\Omega_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen mit:*

$$M = \bigcap_{i \in I} \Omega_i \quad (13.2)$$

eine offene Überdeckung.

13.1 Satz von Heine–Borel

Satz 13.6 (Satz von Heine–Borel). *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Der Satz von Heine–Borel wird auch *Überdeckungssatz* genannt.

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum. \Rightarrow : Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M , für die keine endliche Teilüberdeckung existiert. $???? \Leftarrow$: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann ist $(B_\varepsilon(x))_{x \in M}$ eine offene Überdeckung von M , für die eine endliche Teilüberdeckung $(B_\varepsilon(x))_{x \in M' \subseteq M}$ existiert. Es gibt daher ein $x \in M$, sodass unendlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also eine Teilfolge, in $B_\varepsilon(x)$ liegen, die also gegen x konvergiert. \square

Kapitel 14

Diskrete metrische Räume

Definition 14.1 (Diskreter metrischer Raum). *Eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) , die nur aus isolierten Punkten besteht:*

$$\forall x \in \Omega \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap \Omega = \{x\} \quad (14.1)$$

wird diskret genannt.

Beispiel 14.2. \mathbb{N} und \mathbb{Z} sind der vom Betrag induzierten Metrik diskret, \mathbb{Q} und \mathbb{R} dagegen nicht.

Lemma 14.3. *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann diskret und kompakt, wenn sie endlich ist.*

Beweis. Sei M ein metrischer Raum und $\Omega \subset M$ eine Teilmenge. \Rightarrow : Sei Ω diskret und kompakt. Sei $\varepsilon_x > 0$ für jedes $x \in \Omega$ derart, dass $B_{\varepsilon_x}(x) \cap \Omega = \{x\}$, dann ist $(B_{\varepsilon_x}(x))_{x \in \Omega}$ eine offene Überdeckung von Ω , für die jedes $x \in \Omega$ nur in $B_{\varepsilon_x}(x)$ enthalten ist. Da eine endliche Teilüberdeckung existiert, muss Ω endlich sein. \Leftarrow : Sei Ω endlich. Sei $x \in \Omega$ beliebig und sei $\varepsilon < \min_{y \in \Omega, x \neq y} d(x, y) > 0$, dann ist $B_\varepsilon(x) \cap \Omega = \{x\}$, womit Ω diskret ist. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Ω und sei $i_x \in I$ für jedes $x \in \Omega$ derart, dass $x \in U_{i_x}$, dann ist $(U_{i_x})_{x \in \Omega}$ eine endliche Teilüberdeckung, womit Ω kompakt ist. \square

Lemma 14.4. *Eigentliche Abbildungen bilden diskrete und abgeschlossene Teilmengen auf diskrete Teilmengen ab.*

Beweis. Sei $f: (M, d) \rightarrow (N, d')$ eine eigentliche Abbildung zwischen metrischen Räumen (M, d) und (N, d') , dann XXXX. \square

Kapitel 15

Folgen in metrischen Räumen

15.1 Punktfolgen in metrischen Räumen

Definition 15.1 (Konvergenz in metrischen Räumen). *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M, d) , für die es einen Punkt $x \in M$ gibt mit:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall N > n : d(x_N, x) < \varepsilon \quad (15.1)$$

ist konvergent gegen x .

Definition 15.2 (Cauchy-Folgen in metrischen Räumen). *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M, d) , für die:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall M, N > n : d(x_M, x_N) < \varepsilon \quad (15.2)$$

wird Cauchy-Folge genannt.

Lemma 15.3. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. XXXX □

Definition 15.4 (Vollständigkeit). *Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, wird vollständig genannt.*

15.2 Funktionenfolgen in metrischen Räumen

Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f: X \rightarrow Y$ Abbildungen sowie $g: Y \rightarrow Z$ stetig.

Kapitel 16

Vererbungssätze

Satz 16.1 (Erster Vererbungssatz). *Ist $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise und $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass alle $(f_n)_{n > N}$ stetig in $x \in X$ sind, dann ist f stetig in x .*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Da $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, sei $M \in \mathbb{N}$ derart, dass $\forall n > M: d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Da alle $(f_n)_{n \geq N}$ stetig in x sind, sei $\delta > 0$ derart, dass $\forall n > N \forall x' \in X: d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$. Sei $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ und $n > \max\{M, N\}$, dann ist:

$$d_Y(f(x), f(x')) \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{d_Y(f(x), f_n(x))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_n(x), f_n(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_n(x'), f(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \quad (16.1)$$

□

Beweis. Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$, dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \end{aligned} \quad (16.2)$$

XXXX Prüfen, ob Limiten vertauscht werden dürfen. □

Satz 16.2 (Zweiter Vererbungssatz). *Ist $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig und $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass alle $(f_n)_{n > N}$ gleichmäßig stetig sind, dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, sei $M \in \mathbb{N}$ derart, dass $\forall n > M \forall x \in X: d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Da alle $(f_n)_{n > N}$ gleichmäßig stetig sind, sei $\delta > 0$ derart, dass $\forall n > N \forall x, x' \in X: d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$. Seien $x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ und $n > \max\{M, N\}$, dann ist:

$$d_Y(f(x), f(x')) \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{d_Y(f(x), f_n(x))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_n(x), f_n(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_n(x'), f(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \quad (16.3)$$

□

Lemma 16.3. *Ist $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, dann ist $g \circ f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \circ f$ punktweise.*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Da g stetig ist, sei $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall_{y \in Y} : d_Y(y, f(x)) < \delta \Rightarrow d_Z(g(y), (g \circ f)(x)) < \varepsilon \quad (16.4)$$

Da $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, sei $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall_{n > N} : d_Y(f_n(x), f(x)) < \delta \Rightarrow d_Z((g \circ f_n)(x), (g \circ f)(x)) < \varepsilon \quad (16.5)$$

□

Lemma 16.4. *Ist $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, dann ist $g \circ f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \circ f$ gleichmäßig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist, gilt:

$$\forall_{x \in X} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in Y} : d_Y(y, f(x)) < \delta \Rightarrow d_Z(g(y), (g \circ f)(x)) < \varepsilon \quad (16.6)$$

Da $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, sei $N \in \mathbb{N}$ derart, dass:

$$\forall_{n > N} \forall_{x \in X} : d_Y(f_n(x), f(x)) < \delta \Rightarrow d_Z((g \circ f_n)(x), (g \circ f)(x)) < \varepsilon \quad (16.7)$$

□

Kapitel 17

Stetigkeit in metrischen Räumen

17.1 Punktweise Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 17.1 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) , für die:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad (17.1)$$

ist stetig im Punkt $x \in X$.

Eine bei Abbildung, die in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist, ist stetig.

Das verallgemeinert die Definition (??) für normierte Räume, die hier im Spezialfall der von der Norm induzierten Metrik nach Gleichung (??) enthalten ist.

Lemma 17.2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.

Beweis. Seien $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ und $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ jeweils stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) . XXXX \square

Satz 17.3. Für eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) , (Y, d_Y) sind äquivalent:

(I.) f ist stetig bei $x \in X$

(II.) Wenn $x_n \rightarrow x$ in X , dann $f(x_n) \rightarrow f(x)$ in Y .

(III.) Für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ gibt es eine Umgebung $U \subset X$ von x mit $f[U] \subset V$.

Satz 17.4. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) metrische Räume und $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ sowie $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ stetig, dann ist auch $g \circ f: (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$ stetig.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Da f stetig ist gilt:

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad (17.2)$$

Da g stetig ist, gilt mit der Wahl $y' = f(x')$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \zeta > 0 : d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) < \zeta \quad (17.3)$$

Durch Kombination folgt, dass $g \circ f$ bei $x \in X$ stetig ist:

$$\forall \delta > 0 \exists \zeta > 0 \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Z([g \circ f](x), [g \circ f](x')) < \zeta \quad (17.4)$$

\square

Satz 17.5. Für eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ sind äquivalent:

(I.) f ist stetig

(II.) Urbilder von offenen Teilmengen von Y unter f sind offen in X

(III.) Urbilder von abgeschlossenen Teilmengen in Y unter f sind abgeschlossen in X

Dieser Satz ist essentiell für die allgemeinere Definition (??) der Stetigkeit in topologischen Räumen.

17.2 Gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 17.6 (Gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen). Eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) , für die:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad (17.5)$$

ist gleichmäßig stetig.

Das verallgemeinert die Definition (6.2) für normierte Räume, die hier im Spezialfall der von der Norm induzierten Metrik nach Gleichung (??) enthalten ist.

17.3 Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 17.7 (Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen). Eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) . für die:

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x') \quad (17.6)$$

ist lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten L .

Das verallgemeinert die Definition (6.3) für normierte Räume, die hier im Spezialfall der von der Norm induzierten Metrik nach Gleichung (??) enthalten ist.

Beispiel 17.8. Die Identität ist lipschitzstetig.

Lemma 17.9. Die Komposition von lipschitzstetigen Abbildungen ist lipschitzstetig.

Beweis. Seien $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ und $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ jeweils lipschitzstetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) mit jeweiligen Lipschitzkonstanten L_f und L_g . Für $x, x' \in X$ beliebig gilt dann:

$$\begin{aligned} d_X(x, x') &< L_f d_Y(f(x), f(x')) < L_f L_g d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')) \\ &= L_f L_g d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')), \end{aligned} \quad (17.7)$$

weshalb $g \circ f$ lipschitzstetig ist. □

Der Beweis zeigt für die Lipschitz-Konstante:

$$L_{g \circ f} = L_f L_g. \quad (17.8)$$

Die Menge der Lipschitzstetigen Funktionen auf einem metrischen Raum (X, d) wird als:

$$\text{Lip}(X) := \left\{ f: (X, d) \rightarrow (X, d) \mid \exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x, x' \in X} : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x') \right\} \quad (17.9)$$

bezeichnet. Für eine Funktion $f \in \text{Lip}(X)$ wird die kleinste Lipschitzkonstante als:

$$\text{Lip}(f) := \inf \left\{ L \in \mathbb{R}^+ \mid \forall_{x, x' \in X} : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x') \right\} \quad (17.10)$$

bezeichnet.

17.4 Hölder-Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 17.10 (Hölder-Stetigkeit in metrischen Räumen). *Eine Abbildung $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) , für die:*

$$\exists_{L \in \mathbb{R}^+} \exists_{\alpha \in (0, 1]} \forall_{x, x' \in X} : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x')^\alpha \quad (17.11)$$

ist Hölderstetig zum Hölderexponenten α (oder α -Hölderstetig).

Das verallgemeinert die Definition (6.4) für normierte Räume, die hier im Spezialfall der von der Norm induzierten Metrik nach Gleichung (??) enthalten ist, und es verallgemeinert die Definition (17.7) der Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen, die hier im Spezialfall $\alpha = 1$ enthalten ist.

Lemma 17.11. *Die Komposition von Hölderstetigen Abbildungen ist Hölderstetig.*

Beweis. Seien $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ und $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ jeweils Lipschitzstetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) mit jeweiligen Lipschitzkonstanten L_f und L_g sowie jeweiligen Hölderkonstanten α_f und α_g . Für $x, x' \in X$ beliebig gilt dann:

$$\begin{aligned} d_X(x, x') &< L_f d_Y(f(x), f(x'))^{\alpha_f} < L_f (L_g d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x'))^{\alpha_g})^{\alpha_f} \\ &= L_f L_g^{\alpha_f} d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x'))^{\alpha_f \alpha_g}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

weshalb $g \circ f$ Hölderstetig ist. □

Der Beweis zeigt für die Lipschitz- und Hölder-Konstante:

$$L_{g \circ f} = L_f L_g \quad (17.13)$$

$$\alpha_{g \circ f} = \alpha_f \alpha_g^{\alpha_f}. \quad (17.14)$$

Die Menge der Hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponent α auf einem metrischen Raum (X, d) wird als:

$$\text{Hol}_\alpha(X) := \left\{ f: (X, d) \rightarrow (X, d) \mid \exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x, x' \in X} : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x')^\alpha \right\} \quad (17.15)$$

bezeichnet, wobei $\text{Hol}_1 = \text{Lip}$. Für eine Funktion $f \in \text{Hol}_\alpha(X)$ wird die kleinste Lipschitzkonstante als:

$$\text{Hol}_\alpha(f) := \inf \left\{ L \in \mathbb{R}^+ \mid \forall_{x, x' \in X} : d_Y(f(x), f(x')) < L d_X(x, x')^\alpha \right\} \quad (17.16)$$

bezeichnet, wobei $\text{Hol}_1 = \text{Lip}$.

Zudem induziert eine Abbildung $f \in \text{Hol}_\alpha(X, Y)$ mit Lemma () und () eine Abbildung:

$$\text{Hol}_\alpha(f) : \text{Hol}_\alpha(X) \rightarrow \text{Hol}_\alpha(Y), \gamma \mapsto f \circ \gamma \circ f^{-1} \quad (17.17)$$

$$\text{Hol}_\alpha(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{Hol}_\alpha(X)} \quad (17.18)$$

$$\text{Hol}_\alpha(f \circ g) = \text{Hol}_\alpha(f) \circ \text{Hol}_\alpha(g) \quad (17.19)$$

Kategorientheoretisch betrachtet bildet $\text{Hol}_\alpha : \text{core } \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{Mag}$ damit einen kovarianten Funktor.

Kapitel 18

Kontraktionen

Definition 18.1 (Kontraktion). *Eine Lipschitzstetige Abbildung $f: (M, d) \rightarrow (M, d)$ in einem metrischen Raum (M, d) mit $L < 1$ ist eine Kontraktion des metrischen Raumes.*

Satz 18.2. *Die Kontraktion eines beschränkten metrischen Raumes ist nicht surjektiv.*

Beweis. Sei $\varepsilon < \text{diam}(M)(1 - L) > 0$, dann:

$$\exists x, y \in M : d(x, y) > \text{diam}(M) - \varepsilon > L \text{diam}(M) \quad (18.1)$$

Ist f surjektiv, dann $\exists x', y' \in M : f(x') = x \wedge f(y') = y$ und es ergibt sich der Widerspruch:

$$L \text{diam}(M) < d(x, y) = d(f(x'), f(y')) < L d(x', y') < L \text{diam}(M) \quad (18.2)$$

□

Für eine Kontraktion gilt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in M \exists n \in \mathbb{N}, n > \log_L(\varepsilon/d(x, y)) : \\ d(f^n(x), f^n(y)) < L^n d(x, y) < L^{\log_L(\varepsilon/d(x, y))} d(x, y) = \varepsilon \end{aligned} \quad (18.3)$$

Das zeigt, dass $\forall x, y \in M$ die Folgen $f^n(x)$ und $f^n(y)$ gegeneinander konvergieren, es kann daher die Konvergenz der Folge nur für ein $x_0 \in M$ betrachtet werden.

18.1 Banachscher Fixpunktsatz

Satz 18.3 (Banachscher Fixpunktsatz). *Für einen Banachraum (M, d) hat jede Kontraktion $f: (M, d) \rightarrow (M, d)$ einen eindeutigen Fixpunkt $x \in M$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Zunächst ist der Fixpunkt eindeutig, da mit zwei verschiedenen Fixpunkten $x, x' \in M$ mit $f(x) = x$ und $f(x') = x'$ folgen würde, dass $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$, was im Widerspruch zu $L < 1$ bei einer Kontraktion steht.

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ beliebig, dann ist mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) < (L^{m-n} + \dots + 1)d(x_{n+1}, x_n) \\ &< \frac{1}{1-L} d(x_{n+1}, x_n) < \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \end{aligned} \quad (18.4)$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Mit $n > \log_L(\varepsilon(1-L)/d(x_1, x_0))$ gilt:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \leq \frac{L^{\log_L(\varepsilon(1-L)/d(x_1, x_0))}}{1-L} d(x_1, x_0) < \varepsilon \quad (18.5)$$

Damit ist die Folge x_n eine Cauchyfolge und konvergiert, da M vollständig ist. Für den Wert x gegen den die Folge konvergiert muss gelten:

$$f(x) = x \quad (18.6)$$

□

Es sei $f: M \rightarrow M$ derart, dass $f^n: M \rightarrow M$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion ist, die nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $x \in M$ hat. Dann ist $x \in M$ auch ein Fixpunkt von f , da:

$$f(x) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)), \quad (18.7)$$

womit $f(x)$ auch ein Fixpunkt von f^n ist, womit aufgrund der Eindeutigkeit des Fixpunkts $f(x) = x$ folgt.

18.2 Satz von Bessaga

Satz 18.4 (Satz von Bessaga). *Für eine Menge M und eine Abbildung $f: M \rightarrow M$, für die f^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau einen Fixpunkt hat, gibt es für jedes $L \in (0; 1)$ eine vollständige Metrik d_L auf M , sodass f bezüglich d_L eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante L ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 19

Äquivalenz von Metriken

Kapitel 20

Geodäten in metrischen Räumen

Definition 20.1 (Geodätischer metrischer Raum). *Ein metrischer Raum (M, d) , für den $\forall x, y \in M$ eine minimierende Geodäte existiert, wird geodätisch genannt.*

$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein geodätischer metrischer Raum.

Kapitel 21

Vervollständigung metrischer Räume

Kapitel 22

Hausdorff-Distanz

Definition 22.1 (Hausdorff-Distanz). Für einen metrischen Raum (M, d) und nichtleere Teilmengen $X, Y \subseteq M$ ist:

$$d_{\text{H}}(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y), \sup_{y \in Y} \text{dist}(X, y) \right\} \quad (22.1)$$

ihre Hausdorff-Distanz.

Lemma 22.2. Für einen metrischen Raum (M, d) und nichtleere Teilmengen $X, Y \subseteq M$ ist:

$$\bar{X} = \bar{Y} \Leftrightarrow d_{\text{H}}(X, Y) = 0. \quad (22.2)$$

Beweis. XXXX

$$\begin{aligned} \bar{X} = \bar{Y} &\Leftrightarrow X \subseteq \bar{Y} \wedge Y \subseteq \bar{X} \Leftrightarrow \left(\forall_{x \in X} : x \in \bar{Y} \right) \wedge \left(\forall_{y \in Y} : y \in \bar{X} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall_{x \in X} : \text{dist}(x, Y) = 0 \right) \wedge \left(\forall_{y \in Y} : \text{dist}(X, y) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y) = 0 \wedge \sup_{y \in Y} \text{dist}(X, y) = 0 \Leftrightarrow d_{\text{H}}(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (22.3)$$

□

Lemma 22.3. Für einen metrischen Raum (M, d) und nichtleere Teilmengen $X, Y \subseteq M$ ist:

$$|\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)| \leq 2d_{\text{H}}(X, Y). \quad (22.4)$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 22.4. Für einen vollständigen metrischen Raum (M, d) ist $(\text{Comp}(M), d_{\text{H}})$ vollständig.

Beweis. XXXX

□

Lemma 22.5. Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann kompakt, wenn $(\text{Comp}(M), d_{\text{H}})$ kompakt ist.

Beweis. XXXX

□

Lemma 22.6. Ein beschränkter metrischer Raum (M, d) ist genau dann lokalkompakt, wenn $(\text{Comp}(M), d_{\text{H}})$ lokalkompakt ist.

Beweis. XXXX

□

Teil IV
Uniforme Räume

Kapitel 23

Nachbarschaften

Kapitel 24

Cauchyfilter- und netze

Definition 24.1 (Cauchyfilter). Für einen uniformen Raum (X, Φ) wird ein Filter \mathbb{F} auf X , für den:

$$\forall N \in \Phi \exists F \in \mathbb{F}: F \times F \subseteq N \quad (24.1)$$

Cauchyfilter genannt.

Definition 24.2 (Vollständigkeit). Ein uniformer Raum, in dem jeder Cauchyfilter konvergiert, wird vollständig genannt.

Definition 24.3 (Cauchynetz). Für einen uniformen Raum (X, Φ) wird ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ auf X , für das:

$$\forall N \in \Phi \exists i \in I \forall j, k \succ i: (x_j, x_k) \in N \quad (24.2)$$

Cauchynetz genannt.

Teil V

Grundlegende Topologie

Kapitel 25

Spezielle Topologien

Im Gegensatz zur Algebra, in welcher Mengen mit Verknüpfungsabbildungen auf ihnen betrachtet werden, werden in der Topologie (ähnlich wie in der Maßtheorie) bestimmte Mengensysteme (Teilmengen der Potenzmenge) von (XXXX: oder auf?) ihnen betrachtet. Die Motivation für die Definition einer Topologie, die ein solches Mengensystem ist, stammt dabei von den offenen Mengen von metrischen Räumen. Die leere Menge und die ganze Menge sind offen, darüber hinaus sind endliche Schnitte und abzählbar unendliche Vereinigungen offener Mengen wieder offen. Ein Mengensystem mit solchen Eigenschaften kann auch ganz ohne eine Metrik untersucht werden.

Definition 25.1 (Topologie). Für eine Menge X ist ein Mengensystem $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit:

- I.) $\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$
- II.) Für eine endliche Indexmenge I und $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$ ist $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_X$.
(Endliche Schnitte sind also wieder enthalten.)
- III.) Für eine beliebige Indexmenge I und $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$ ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_X$.
(Beliebige Vereinigungen sind also wieder enthalten.)

eine Topologie. Die Menge X wird mit der Topologie \mathcal{O}_X zu einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) .

In einem metrischen Raum ist das Mengensystem aller offenen Mengen nach Satz (9.7) und (9.8) eine Topologie. Damit induziert eine Metrik stets eine Topologie. Ein topologischer Raum, dessen Topologie von einer Metrik induziert wird, wird *metrisierbar* genannt. Insbesondere induziert eine Norm eine Topologie, die *Normtopologie* genannt wird. Ein normierter Vektorraum, dessen entsprechende Normtopologie betrachtet wird, wird auch *topologischer Vektorraum* genannt.

$\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\}$ wird *indiskrete* und $\mathcal{O}_X = \mathcal{P}(X)$ *diskrete Topologie* (oder *Klumpentopologie*) genannt. Die Mengen der Topologie werden *offene Mengen* genannt, die Mengen deren Komplemente offen sind werden *abgeschlossene Mengen* genannt - das verallgemeinert das Konzept aus den metrischen Räumen. Mengen wie \emptyset und X , die offen und abgeschlossen zugleich sind werden *abgeschlossene Mengen* genannt.

Für zwei verschiedene Topologien \mathcal{S}, \mathcal{T} auf einer Menge X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ wird \mathcal{S} die *gröbere* und \mathcal{T} die *feinere* der beiden Topologien genannt. Generell gilt eine Topologie als *grob*, wenn sie wenige und als *fein*, wenn sie viele offene Mengen enthält. Die indiskrete ist die gröbste und die diskrete die feinste Topologie.

Lemma 25.2. *Für zwei verschiedene Topologien \mathcal{S} , \mathcal{T} auf einer Menge X ist $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ ebenso eine Topologie auf X .*

Beweis. Da $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ und $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ist $\emptyset, X \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Zudem ist für eine endliche Indexmenge I :

$$\begin{aligned} (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} &\Rightarrow (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{S} \wedge (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{S} \wedge \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \end{aligned} \quad (25.1)$$

und eine unendliche Indexmenge J :

$$\begin{aligned} (V_j)_{j \in J} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} &\Rightarrow (V_j)_{j \in J} \in \mathcal{S} \wedge (V_j)_{j \in J} \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow \bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{S} \wedge \bigcap_{j \in J} V_j \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \end{aligned} \quad (25.2)$$

□

Für eine Menge X sei $\text{Top}(X) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ das Mengensystem der Topologien auf X . Es ist \emptyset Nach Lemma (25.2) ist es schnittstabil (also ein π -System).

Definition 25.3 (Punktierter topologischer Raum). *Ein topologischer Raum X mit einem Punkt $x \in X$ wird zu einem punktierten topologischen Raum (X, x) .*

25.1 Teilraumtopologie

Lemma 25.4 (Teilraumtopologie). *Für einen topologischen Raum (Y, \mathcal{O}_Y) und eine Teilmenge $X \subseteq Y$ ist X mit der Topologie:*

$$\mathcal{O}_X := \{X \cap U \mid U \in \mathcal{O}_Y\} \quad (25.3)$$

ebenfalls eine Topologie, die Teilraumtopologie (auch Relativ- oder Spurtopologie).

Beweis. XXXX □

Es gibt eine kanonische injektive Abbildung $i: X \hookrightarrow Y, x \mapsto x$.

25.2 Quotiententopologie

Lemma 25.5 (Quotiententopologie). *Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist X/Y mit der Topologie:*

$$\mathcal{O}_{X/Y} := \text{????} \quad (25.4)$$

ebenfalls eine Topologie, die Quotiententopologie.

Beweis. XXXX □

Es gibt eine kanonische surjektive Abbildung $p: X \twoheadrightarrow X/Y, x \mapsto [x]$.

Kapitel 26

Spezielle topologische Räume

26.1 Hausdorff-Räume

Die Betrachtung von Hausdorff-Räumen wird im Kapitel „Hausdorff-Räume“ fortgeführt.

26.2 Reguläre Räume

Korollar 26.1. *Reguläre T_1 -Räume sind hausdorffsch.*

Die Betrachtung von regulären Räumen wird im Kapitel „Reguläre Räume“ fortgeführt.

26.3 Normale Räume

Korollar 26.2. *Normale T_1 -Räume sind regulär.*

Korollar 26.3. *Normale T_1 -Räume sind hausdorffsch.*

Die Betrachtung von normalen Räumen wird im Kapitel „Normale Räume“ fortgeführt.

Kapitel 27

Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen

27.1 Stetige Abbildungen

In der Theorie der metrischen Räume und spezieller der Theorie der normierten Räume, insbesondere der reellen Analysis, wird Stetigkeit über das ε - δ -Kriterium definiert. Diese Definition kann nicht auf topologische Räume verallgemeinert werden, da keine Metrik mehr vorhanden ist, um Abstände zwischen Punkten zu messen. In der Theorie der metrischen Räume ist (globale) Stetigkeit nach dem ε - δ -Kriterium jedoch äquivalent dazu, dass Urbilder offener Mengen wieder offen sind, was sich wiederum auf topologische Räume verallgemeinern lässt.

Definition 27.1 (Stetigkeit in topologischen Räumen). *Für topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) wird eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, für die Urbilder offener Mengen offen sind:*

$$\forall_{U \in \mathcal{O}_Y} : \phi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \quad (27.1)$$

stetig genannt.

Das verallgemeinert nach Satz (XXXX) die Definition (17.1) für metrische Räume, die hier im Spezialfall der von den offenen Mengen in einem metrischen Raum induzierten Topologie nach Gleichung (??) enthalten ist.

Eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(X)$ auf X ist immer stetig.

Beispiel 27.2. *Die Identität ist stetig.*

Lemma 27.3. *Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Seien $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Sei $U \in \mathcal{O}_Z$, dann ist $g^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Y$ (da g stetig ist) und $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$ (da f stetig ist), womit $g \circ f$ stetig ist. \square

Lemma 27.4. *Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist genau dann stetig, wenn Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.*

Beweis. XXXX □

Lemma 27.5. *Das Produkt von stetigen Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. XXXX □

Satz 27.6 (Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie). *Für einen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) und eine Teilmenge $Y \subseteq Z$ ist die Inklusion $i: Y \hookrightarrow Z, y \mapsto y$ stetig. Mit einem weiteren topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $i \circ f: X \rightarrow Z$ stetig ist.*

Beweis. Sei $U \in \mathcal{O}_Z$, dann ist $i^{-1}(U) = U \cap Y$ offen in Y nach Definition (XXXX) der Teilraumtopologie. \Rightarrow : Folgt mit Lemma (27.3). \Leftarrow : Folgt aus Lemma (27.15) II.), explizit: Sei $U' \in \mathcal{O}_Y$, dann gibt es ein $U \in \mathcal{O}_Z$ mit $U' = U \cap Y$ nach Definition (XXXX) der Teilraumtopologie. Da i injektiv ist, ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U') &= f^{-1}(U \cap Y) = (i \circ f)^{-1}(U \cap Y) \\ &= (i \circ f)^{-1}(U) \cap \underbrace{(i \circ f)^{-1}(Y)}_{=X} = (i \circ f)^{-1}(U) \end{aligned} \quad (27.2)$$

offen in X . □

Bei stetigen Abbildungen sind die Urbilder offener und abgeschlossener Mengen jeweils wieder offen und abgeschlossen, die beiden Bedingungen sind nach Lemma (27.4) sogar äquivalent zueinander. Unter stetigen Abbildungen müssen offene und abgeschlossene Mengen jedoch nicht unbedingt jeweils offen und abgeschlossen sein, umgekehrt folgt aus diesen beiden Bedingungen keine Stetigkeit und zuletzt sind sie nicht äquivalent. Das führt auf zwei neue Arten von Abbildungen.

27.2 Offene Abbildungen

Definition 27.7 (Offene Abbildungen). *Für topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) wird eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet:*

$$\forall_{U \in \mathcal{O}_X} : \phi(U) \in \mathcal{O}_Y \quad (27.3)$$

offen genannt.

Offenbar ist für eine offene bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ die Umkehrabbildung f^{-1} stetig und für eine stetige bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ die Umkehrabbildung f^{-1} offen. Eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$ mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(Y)$ auf Y ist immer offen.

Beispiel 27.8. *Die Identität ist offen.*

Lemma 27.9. *Die Komposition offener Abbildungen ist offen.*

Beweis. Seien $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Sei $U \in \mathcal{O}_X$, dann ist $f(U) \in \mathcal{O}_Y$ (da f offen ist) und $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \in \mathcal{O}_Z$ (da g offen ist), womit $g \circ f$ offen ist. □

Das bedeutet, dass die topologischen Räume mit den offenen Abbildungen eine Kategorie bilden.

Lemma 27.10. *Das Produkt von offenen Abbildungen ist offen.*

Beweis. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: X \rightarrow Y$ offene Abbildungen zwischen topologischen Räumen. XXXX \square

27.3 Abgeschlossene Abbildungen

Definition 27.11 (Abgeschlossene Abbildungen). *Für topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) wird eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, die abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet:*

$$\forall_{A^c \in \mathcal{O}_X} : \phi(A)^c \in \mathcal{O}_Y \quad (27.4)$$

abgeschlossen genannt.

Beispiel 27.12. *Die Identität ist abgeschlossen.*

Lemma 27.13. *Die Komposition abgeschlossener Abbildungen ist abgeschlossen.*

Beweis. Seien $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ abgeschlossene Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen (da f abgeschlossen ist) und $(g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq Z$ abgeschlossen (da g abgeschlossen ist), womit $g \circ f$ abgeschlossen ist. \square

Das bedeutet, dass die topologischen Räume mit den abgeschlossenen Abbildungen eine Kategorie bilden.

Seien X und Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ bijektiv.

Lemma 27.14. *f ist genau dann offen, wenn f abgeschlossen ist.*

Beweis. \Rightarrow : Sei f offen und $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist A^c offen, $f(A)^c = f(A^c)$ offen und $f(A)$ abgeschlossen, womit f abgeschlossen ist. \Leftarrow : Sei f abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen, dann ist U^c abgeschlossen, $f(U)^c = f(U^c)$ abgeschlossen und $f(U)$ offen, womit f offen ist. \square

Lemma 27.15. *Für eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ topologischer Räume gilt:*

- I.) *Ist $g \circ f$ stetig und f offen, dann ist $g|_{f(X)}$ stetig.*
- II.) *Ist $g \circ f$ stetig sowie g injektiv und offen, dann ist f stetig.*
- III.) *Ist $g \circ f$ offen und f stetig, dann ist $g|_{f(X)}$ offen.*
- IV.) *Ist $g \circ f$ offen sowie g injektiv und stetig, dann ist f offen.*

Als Spezialfall von I.) und III.) gilt: Ist $g \circ f$ stetig und f surjektiv und offen, dann ist g stetig. Ist $g \circ f$ offen und f surjektiv und stetig, dann ist g offen.

Beweis. Analog zu Lemma (48.9). I.): Sei $U \subseteq Z$ offen, dann ist $f^{-1}(g|_{f(X)}^{-1}(U)) = (g|_{f(X)} \circ f)^{-1}(U) \subseteq X$ offen, womit $f(f^{-1}(g|_{f(X)}^{-1}(U))) = g|_{f(X)}^{-1}(U) \cap f(X) = g|_{f(X)}^{-1}(U) \subseteq Y$ offen ist. II.): Sei $U \subseteq Y$ offen, dann ist $g(U) \subseteq Z$ offen, womit $f^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(g(U))) = (g \circ f)^{-1}(g(U)) \subseteq X$ offen ist. III.): Sei $U \subseteq f(X)$ offen, dann ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, womit $(g \circ f)(f^{-1}(U)) = g|_{f(X)}(U \cap f(X)) = g|_{f(X)}(U) \subseteq Z$ offen ist. IV.): Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $g(f(U)) = (g \circ f)(U) \subseteq Z$ offen, womit $g^{-1}(g(f(U))) = f(U) \subseteq Y$ offen ist. \square

Lemma 27.16. Für topologische Räume X und Y , einen Schnitt $s: X \hookrightarrow Y$ und eine Retraktion $r: Y \twoheadrightarrow X$ gilt:

I.) Ist s offen, dann ist $r|_{s(X)}$ stetig.

II.) Ist s stetig, dann ist $r|_{s(X)}$ offen.

Beweis. I.): $r \circ s = \text{id}_X$ ist stetig nach Beispiel (27.2) und s offen, womit $r|_{s(X)}$ nach Lemma (27.15) I.) stetig ist. II.): $r \circ s = \text{id}_X$ ist offen nach Beispiel (27.8) und s stetig, womit $r|_{s(X)}$ nach Lemma (27.15) III.) offen ist. \square

Beweis. I.): $s \circ r|_{s(X)} = \text{id}_{s(X)}$ ist stetig nach Beispiel (27.2) sowie s injektiv und offen, womit $r|_{s(X)}$ nach Lemma (27.15) II.) stetig ist. II.): $s \circ r|_{s(X)} = \text{id}_{s(X)}$ ist offen nach Beispiel (27.8) sowie s injektiv und stetig, womit $r|_{s(X)}$ nach Lemma (27.15) IV.) offen ist. \square

Satz 27.17. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, die offen oder abgeschlossen ist.

I.) Ist f injektiv, dann ist f eine topologische Einbettung.

II.) Ist f surjektiv, dann ist f eine Quotientenabbildung.

III.) Ist f bijektiv, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. XXXX \square

Kapitel 28

Induzierte und koinduzierte Topologie

Abbildungen zwischen Mengen erzeugen eine (nicht unbedingt eindeutige oder eineindeutige Korrespondenz) zwischen ihren jeweiligen Elementen und Teilmengen. Verfügt eine der beiden Mengen über eine Topologie, lässt sich untersuchen, ob diese sich mithilfe der Abbildung auf die jeweils andere übertragen lässt.

28.1 Induzierte Topologie

Lemma 28.1 (Induzierte Topologie). *Für eine Menge X , einen topologischen Raum (Y, \mathcal{O}_Y) und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$\mathcal{O}_X = \{f^{-1}(V) \subseteq X \mid V \in \mathcal{O}_Y\} \quad (28.1)$$

eine Topologie auf X , die induzierte Topologie genannt wird.

Beweis. Da $\emptyset \in \mathcal{O}_Y$ ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{O}_X$ und da $Y \in \mathcal{O}_Y$ ist $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{O}_X$. Für eine endliche Familie $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$ gibt es eine endliche Familie $(V_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_Y$ mit $\forall i \in I: U_i = f^{-1}(V_i)$, womit:

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\underbrace{\bigcap_{i \in I} V_i}_{\in \mathcal{O}_Y}\right) \in \mathcal{O}_X. \quad (28.2)$$

Für eine beliebige Familie $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$ gibt es eine beliebige Familie $(V_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_Y$ mit $\forall i \in I: U_i = f^{-1}(V_i)$, womit:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_{i \in I} V_i}_{\in \mathcal{O}_Y}\right) \in \mathcal{O}_X. \quad (28.3)$$

□

Korollar 28.2. *Die induzierte Topologie einer diskreten Topologie entlang einer injektiven Abbildung ist diskret. Die induzierte Topologie einer indiskreten Topologie ist indiskret.*

Korollar 28.3. *Für einen topologischen Raum (Y, \mathcal{O}_Y) und eine Teilmenge $X \subseteq Y$ ist die Teilraumtopologie auf X genau die induzierte Topologie der Inklusion $X \hookrightarrow Y$.*

Da Urbilder mit Komplementen vertauschen, ergeben sich die abgeschlossenen Mengen der induzierten Topologie auf völlig analoge Weise:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X^{\text{cl}} &= \{f^{-1}(V)^{\text{cl}} = f^{-1}(V^{\text{cl}}) \subseteq X \mid V \in \mathcal{O}_Y\} \\ &= \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B^{\text{cl}} \in \mathcal{O}_Y\} = \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{O}_Y^{\text{cl}}\}.\end{aligned}\quad (28.4)$$

Lemma 28.4. *Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) , wobei ersterer die induzierte Topologie trägt, ist stetig, offen und abgeschlossen.*

Beweis. I.): Sei $V \in \mathcal{O}_Y$, dann folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ direkt aus Gleichung (28.1). II.): Sei $U \in \mathcal{O}_X$, dann gibt es ein ein $V \in \mathcal{O}_Y$ mit $U = f^{-1}(V)$ nach Gleichung (28.1) und daher $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V \in \mathcal{O}_Y$. III.): Sei $A \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}$, dann gibt es ein ein $B \in \mathcal{O}_Y^{\text{cl}}$ mit $A = f^{-1}(B)$ nach Gleichung (28.4) und daher $f(A) = f(f^{-1}(B)) = B \in \mathcal{O}_Y^{\text{cl}}$. \square

Lemma 28.5. *Die induzierte Topologie einer kompakten Topologie entlang einer Abbildung mit abgeschlossenem Bild (insbesondere einer surjektiven Abbildung) ist kompakt.*

Beweis. Seien X eine Menge, (Y, \mathcal{O}_Y) ein kompakter topologischer Raum und $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung mit $f(X) \subseteq Y$ abgeschlossen. Sei (X, \mathcal{O}_X) die dadurch induzierte Topologie auf X .

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , dann gibt es eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ offener Mengen in Y mit $\forall i \in I: U_i = f^{-1}(V_i)$, die eine offene Überdeckung von $f(X)$ sind, da:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_j\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_j) = \bigcup_{i \in I} U_i = X \Rightarrow \bigcup_{i \in J} V_j = f(X).\quad (28.5)$$

Da Y kompakt und $f(X) \subseteq Y$ abgeschlossen ist letzteres nach Satz (47.2) kompakt, also existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$, sodass $(V_i)_{i \in J}$ bereits eine offene Überdeckung von $f(X)$ ist. Dann ist:

$$\bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} V_j\right) = f^{-1}(f(X)) = X.\quad (28.6)$$

\square

Das abgeschlossene Bild ist dabei zwingend notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 28.6. XXXX

Für die Korrespondenz zweier Topologien bei Verwendung der induzierten Topologie für letztere kann untersucht werden, inwiefern topologische Eigenschaften in Beziehung zueinander stehen. Wichtig sind dabei insbesondere Kompaktheit, Hausdorffigkeit, Regularität und Normalität.

Nach Lemma (72.13) ist die induzierte Topologie einer hausdorffschen Topologie entlang einer injektiven Abbildung hausdorffsch.

Lemma 28.7. *Die koinduzierte Topologie einer hausdorffschen Topologie entlang einer bijektiven Abbildung ist hausdorffsch.*

Beweis. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei (Y, \mathcal{O}_Y) die dadurch koinduzierte Topologie auf Y .

Seien $y \neq y' \in Y$, dann gibt es $x \neq x' \in X$ mit $y = f(x)$ und $y' = f(x')$, da f surjektiv ist. Es gibt disjunkte offene Mengen $U, U' \subset X$ mit $x \in U$ und $x' \in U'$. \square

Lemma 28.8. *Die induzierte Topologie einer hausdorffschen Topologie entlang einer injektiven Abbildung ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien X eine Menge, (Y, \mathcal{O}_Y) ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung. Sei (X, \mathcal{O}_X) die dadurch induzierte Topologie auf X .

Seien $x \neq x' \in X$, dann sind $f(x) \neq f(x') \in Y$, da f injektiv ist. Es gibt disjunkte offene Mengen $V, V' \subset Y$ mit $f(x) \in V$ und $f(x') \in V'$. \square

28.2 Koinduzierte Topologie

Lemma 28.9 (Koinduzierte Topologie). *Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) , eine Menge Y und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$\mathcal{O}_Y = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\} \quad (28.7)$$

eine Topologie auf Y , die koinduzierte Topologie genannt wird.

Beweis. Da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$ ist $\emptyset \in \mathcal{O}_Y$ und da $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$ ist $Y \in \mathcal{O}_Y$. Für eine endliche Familie $(V_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_Y$ ist $(f^{-1}(V_i))_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$, womit:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(V_i) = \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_X \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}_Y. \quad (28.8)$$

Für eine beliebige Familie $(V_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_Y$ ist $(f^{-1}(V_i))_{i \in I} \in \mathcal{O}_X$, womit:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}_Y. \quad (28.9)$$

\square

Korollar 28.10. *Die koinduzierte Topologie einer diskreten Topologie ist diskret. Die koinduzierte Topologie einer indiskreten Topologie entlang einer surjektiven Abbildung ist indiskret.*

Korollar 28.11. *Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist die Quotiententopologie auf X/Y genau die koinduzierte Topologie der Projektion $X \rightarrow X/Y$.*

Da Urbilder mit Komplementen vertauschen, ergeben sich die abgeschlossenen Mengen der koinduzierten Topologie auf völlig analoge Weise:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y^{\text{cl}} &= \{V^{\text{cl}} \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\} \\ &= \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B^{\text{cl}}) = f^{-1}(B)^{\text{cl}} \in \mathcal{O}_X\} = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}\} \end{aligned} \quad (28.10)$$

Lemma 28.12. *Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) , wobei letzterer die koinduzierte Topologie trägt, ist stetig, und sofern zusätzlich injektiv, zudem noch offen und abgeschlossen (also eine topologische Einbettung nach Satz (27.17)).*

Beweis. I.): Sei $V \in \mathcal{O}_Y$, dann folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ direkt aus Gleichung (28.7). II.): Sei $U \in \mathcal{O}_X$, dann ist $f^{-1}(f(U)) = U$, da f injektiv ist. Aus Gleichung (28.7) folgt $f(U) \in \mathcal{O}_Y$. III.): Sei $A \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}$, dann ist $f^{-1}(f(A)) = A$, da f injektiv ist. Aus Gleichung (28.10) folgt $f(A) \in \mathcal{O}_Y$. \square

Die Injektivität ist für die letzten beiden Resultate zwingend notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 28.13. *Es trage $\{0, 1, 2\}$ jeweils die Topologie, für die $\{2\} \subset \{0, 1, 2\}$ die einzige nichttriviale offene bzw. abgeschlossene Teilmenge ist. Die Abbildung $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ und $2 \mapsto 1$ induziert in beiden Fällen die indiskrete Topologie auf $\{0, 1\}$ und ist weder offen noch abgeschlossen.*

Für die Korrespondenz zweier Topologien bei Verwendung der koinduzierten Topologie für letztere kann untersucht werden, inwiefern topologische Eigenschaften in Beziehung zueinander stehen. Wichtig sind dabei insbesondere Kompaktheit, Hausdorffigkeit, Regularität und Normalität.

Lemma 28.14. *Die koinduzierte Topologie einer kompakten Topologie entlang einer surjektiven Abbildung ist kompakt.*

Beweis. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein kompakter topologischer Raum, Y eine Menge und $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Sei (Y, \mathcal{O}_Y) die dadurch koinduzierte Topologie auf Y . Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y , dann ist $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$, sodass $(f^{-1}(V_i))_{i \in J}$ bereits eine offene Überdeckung von X ist. Dann ist:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} V_j\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_j) = X \Rightarrow \bigcup_{i \in J} V_j = f(X) = Y. \quad (28.11)$$

\square

Die Surjektivität ist dabei zwingend notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 28.15. *Für eine endliche Menge X und eine unendliche Menge Y ist $(X, \mathcal{P}(X))$ kompakt und $(Y, \mathcal{P}(Y))$ nicht kompakt. Letzere ist nach Korollar (28.10) die koinduzierte Topologie unter jeder Abbildung $X \rightarrow Y$, die insbesondere nie surjektiv sein kann.*

Lemma 28.16. *Die koinduzierte Topologie einer hausdorffschen Topologie ist hausdorffsch.*

Beweis. XXXX \square

Kapitel 29

Produkt- und Koprodukttopologie

In der Mengenlehre gehören (kartesische) Produkte und Koprodukte (disjunkte Vereinigungen) von Mengen zu den grundlegenden Konstruktionen zur Erzeugung einer einzigen Menge aus einer Familie an Mengen. In der Topologie lässt sich untersuchen, ob es kanonische Möglichkeiten gibt, eine Topologie auf diesen beiden Konstruktionen zu definieren, die analog aus den einzelnen Topologien konstruiert wird.

29.1 Produkttopologie

Definition 29.1 (Produkttopologie). *Für topologische Räume $(X_i, O_i)_{i \in I}$ ist die größte Topologie auf:*

$$X = \prod_{i \in I} X_i, \quad (29.1)$$

also die mit den wenigsten offenen Mengen, bezüglich der alle Projektionsabbildungen $\text{proj}_i: X \rightarrow X_i$ stetig sind, die Produkttopologie auf X .

Die offenen Mengen sind damit:

$$\prod_{i \in I, T_i \in O_i} T_i \quad (29.2)$$

Da die Projektionsabbildungen nach Lemma (47.3) insbesondere kompakt sind, folgt:

Korollar 29.2. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt, dann sind alle X_i kompakt.*

Lemma 29.3 (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie). *Für topologische Räume $(X_i)_{i \in I}$ mit dem Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ und einen topologischen Raum Y mit stetigen Abbildungen $f_i: Y \rightarrow X_i$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$, sodass:*

$$\forall_{i \in I} f_i = \text{proj}_i \circ f \quad (29.3)$$

also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\forall f_i} & X_i \\ & \searrow \exists f & \nearrow \text{proj}_i \\ & X & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Auf den zugrundeliegenden Mengen gibt es nur eine Abbildung, welche das Diagramm kommutativ macht:

$$f: Y \rightarrow X = \prod_{i \in I} X_i, y \mapsto \text{????} \tag{29.4}$$

□

Lemma 29.4. Für einen topologischen Raum X , eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ an topologischen Räumen und eine Familie $(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ an stetigen Abbildungen ist $\prod_{i \in I} f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ stetig.

Beweis. XXXX

□

29.2 Koprodukttopologie

Definition 29.5 (Koprodukttopologie). Für topologische Räume $(X_i, O_i)_{i \in I}$ ist die feinste Topologie auf:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i, \tag{29.5}$$

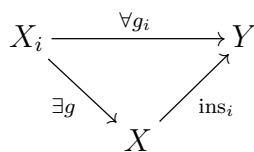
also die mit den meisten offenen Mengen, bezüglich der alle Einbettungsabbildungen $\text{ins}_i: X_i \hookrightarrow X$ stetig sind, die Koprodukttopologie.

Eine Menge $U \subset X$ ist daher genau dann offen, wenn $\forall i \in I: \text{ins}_i^{-1}(U) \subset X_i$ offen sind.

Lemma 29.6 (Universelle Eigenschaft der Koprodukttopologie). Für topologische Räume $(X_i)_{i \in I}$ mit dem Produktraum $X = \coprod_{i \in I} X_i$ und einen topologischen Raum Y mit stetigen Abbildungen $g_i: X_i \rightarrow Y$ gibt es genau eine stetige Abbildung $g: X \rightarrow Y$, sodass:

$$\forall_{i \in I}: g_i = g \circ \text{ins}_i \tag{29.6}$$

also das Diagramm:



kommutiert.

Beweis. Auf den zugrundeliegenden Mengen gibt es nur eine Abbildung, welche das Diagramm kommutativ macht:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y, (x_i, i) \mapsto g_i(x_i) \tag{29.7}$$

□

Lemma 29.7. Für eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ an topologischen Räumen, einen topologischen Raum Y und eine Familie $(f_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ an stetigen Abbildungen ist $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ stetig.

Beweis. XXXX

□

Kapitel 30

Topologische Operationen

Seien X und Y topologische Räume.

30.1 Inneres

Definition 30.1 (Inneres). Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) und eine Teilmenge $\Omega \subset X$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen:

$$\Omega^\circ := \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}_X, \\ U \subseteq \Omega}} U \quad (30.1)$$

ihre Inneres.

Das Innere wird auch als $\text{int}(\Omega)$ bezeichnet und das Innere des Komplements, welches *Äußeres* genannt wird, auch als $\text{ext}(\Omega)$. Da abzählbar unendliche Vereinigungen von offenen Mengen wieder offen sind, ist Ω° offen.

Lemma 30.2. Für einen topologischen Raum X ist eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$ genau dann offen, wenn $\Omega^\circ = \Omega$.

Beweis. \Rightarrow : $\Omega^\circ \subseteq \Omega$ folgt direkt aus Definition (30.1), da das Innere eine Vereinigung von Teilmengen von Ω ist. Ist Ω offen, also $\Omega \in \mathcal{O}_X$, dann ist es in der Vereinigung von Definition (30.1) enthalten, womit $\Omega \subseteq \Omega^\circ$. \Leftarrow : Da Ω° offen ist, ist trivialerweise $\Omega = \Omega^\circ$ offen. \square

Lemma 30.3. Das Innere ist ein Kernoperator. Für Teilmengen $A, B \subset X$ ist:

I.) $A^\circ \subset A$.

II.) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$.

III.) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Beweis. I.) und II.) folgen direkt aus Definition (30.1). \square

Lemma 30.4. Für Teilmengen $A, B \subset X$ ist:

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad (30.2)$$

$$(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ. \quad (30.3)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 A^\circ \cap B^\circ &= \left(\bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \mathcal{O}_X}} U \right) \cap \left(\bigcup_{\substack{V \subseteq B, \\ V \in \mathcal{O}_X}} V \right) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \mathcal{O}_X}} \left(\bigcup_{\substack{V \subseteq B, \\ V \in \mathcal{O}_X}} U \right) \cap V = \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \mathcal{O}_X}} \bigcup_{\substack{V \subseteq B, \\ V \in \mathcal{O}_X}} U \cap V \\
 &= \bigcup_{\substack{W \subseteq A \cap B, \\ W \in \mathcal{O}_X}} W = (A \cap B)^\circ
 \end{aligned} \tag{30.4}$$

$$\begin{aligned}
 A^\circ \cup B^\circ &= \left(\bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \mathcal{O}_X}} U \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{V \subseteq B, \\ V \in \mathcal{O}_X}} V \right) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \mathcal{O}_X}} \bigcup_{\substack{V \subseteq B, \\ V \in \mathcal{O}_X}} U \cup V \\
 &\subseteq \bigcup_{\substack{W \subseteq A \cup B, \\ W \in \mathcal{O}_X}} W = (A \cup B)^\circ
 \end{aligned} \tag{30.5}$$

□

Lemma 30.5. Für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ \tag{30.6}$$

Beweis.

□

30.2 Abschluss

Definition 30.6 (Abschluss). Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) und eine Teilmenge $\Omega \subset X$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen:

$$\bar{\Omega} := \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}, \\ \Omega \subseteq A}} A \tag{30.7}$$

ihre Abschluss.

Der Abschluss wird auch als $\text{cl}(\Omega)$ bezeichnet. Da abzählbar unendliche Schnitte von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind, ist $\bar{\Omega}$ abgeschlossen.

Lemma 30.7. Für einen topologischen Raum X ist eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$ genau dann abgeschlossen, wenn $\bar{\Omega} = \Omega$.

Beweis. \Rightarrow : $\Omega \subseteq \bar{\Omega}$ folgt direkt aus Definition (30.6), da der Abschluss ein Schnitt von Obermengen von Ω ist. Ist Ω abgeschlossen, also $\Omega \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}$, dann ist es im Schnitt von Definition (30.6) enthalten, womit $\bar{\Omega} \subseteq \Omega$. \Leftarrow : Da $\bar{\Omega}$ abgeschlossen ist, ist trivialerweise $\Omega = \bar{\Omega}$ abgeschlossen. □

Lemma 30.8. Der Abschluss ist ein Hüllenoperator. Für Teilmengen $A, B \subset X$ ist:

$$I.) A \subset \bar{A}.$$

$$II.) A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}.$$

$$III.) \bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

Beweis. I.) und II.) folgen direkt aus Definition (30.6). \square

Korollar 30.9. *Es gilt der Zusammenhang:*

$$(\Omega^\circ)^\complement = \left(\bigcup_{\substack{T \in \mathcal{O}_X, \\ T \subseteq \Omega}} T \right)^\complement = \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{O}_X, \\ T \subseteq \Omega}} T^\complement = \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{O}_X^\complement, \\ \Omega^\complement \subseteq T}} T = \bar{\Omega^\complement} \quad (30.8)$$

Lemma 30.10. *Für Teilmengen $A, B \subset X$ ist:*

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \quad (30.9)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (30.10)$$

Beweis. Mit Lemma (??) und den DeMorgan-Gesetzen ist:

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \left(\left((A \cap B)^\complement \right)^\circ \right)^\complement = \left((A^\complement \cup B^\complement)^\circ \right)^\complement \\ &\subseteq \left((A^\complement)^\circ \cup (B^\complement)^\circ \right)^\complement = \left((A^\complement)^\circ \right)^\complement \cap \left((B^\complement)^\circ \right)^\complement = \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned} \quad (30.11)$$

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \left(\left((A \cup B)^\complement \right)^\circ \right)^\complement = \left((A^\complement \cap B^\complement)^\circ \right)^\complement \\ &= \left((A^\complement)^\circ \cap (B^\complement)^\circ \right)^\complement = \left((A^\complement)^\circ \right)^\complement \cup \left((B^\complement)^\circ \right)^\complement = \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned} \quad (30.12)$$

\square

Lemma 30.11. *Für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt:*

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B} \quad (30.13)$$

Beweis. XXXX \square

Lemma 30.12. *Für eine Teilmenge $\Omega \subset X$ und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f(\Omega^\circ) \supseteq f(\Omega)^\circ \quad (30.14)$$

$$f(\bar{\Omega}) \supseteq \overline{f(\Omega)} \quad (30.15)$$

Beweis. Sei $y \in f(\Omega)^\circ$, dann $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(y) \subset f(\Omega)^\circ \subseteq f(\Omega) \Rightarrow f^{-1}(y) \in f^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subset \Omega$, wobei $f^{-1}(B_\varepsilon(y))$ offen ist, da f stetig ist. Damit ist $f^{-1}(y) \in \Omega^\circ \Rightarrow y \in f(\Omega^\circ)$.

Sei $y \in \overline{f(\Omega)}$, dann $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\Omega): y_n \rightarrow y$, wobei $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ nach Lemma (38.4), da f stetig ist. Da $(f^{-1}(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ ist $f^{-1}(y) \in \overline{\Omega} \Rightarrow y \in \overline{f(\Omega)}$. \square

Lemma 30.13. Für eine Teilmenge $\Omega \subset X$ und eine offene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$f(\Omega^\circ) \subseteq f(\Omega)^\circ \quad (30.16)$$

$$f(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{f(\Omega)} \quad (30.17)$$

Beweis. Sei $y \in f(\Omega^\circ)$, dann $\exists x \in \Omega^\circ: f(x) = y$ und $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset \Omega^\circ \subset \Omega$, wobei $f(B_\varepsilon(x))$ offen ist, da f offen ist. Da $y \in f(B_\varepsilon(x)) \subset f(\Omega)$ ist $y \in f(\Omega^\circ)$

Sei $y \in \overline{f(\Omega)}$, dann $\exists x \in \overline{\Omega}: f(x) = y$ und $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega: x_n \rightarrow x$, wobei $f(x_n) \rightarrow f(x)$ nach Lemma (38.3), da f offen ist. Da $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\Omega)$, ist $y \in \overline{f(\Omega)}$. \square

Aus den Lemmata (30.12) und (30.13) folgt direkt:

Korollar 30.14. Für eine Teilmenge $\Omega \subset X$ erhalten stetige und offene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ das Innere und den Abschluss:

$$f(\Omega^\circ) = f(\Omega)^\circ \quad (30.18)$$

$$f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)} \quad (30.19)$$

Lemma 30.15. Für eine Teilmenge $\Omega \subset Y$ und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$f^{-1}(\Omega^\circ) \subseteq f^{-1}(\Omega)^\circ \quad (30.20)$$

$$f^{-1}(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{f^{-1}(\Omega)} \quad (30.21)$$

Beweis. Da f^{-1} offen ist folgt dies aus Lemma (30.13). \square

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(\Omega^\circ)$ beliebig, dann ist $f(x) \in \Omega^\circ$. Daher $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(f(x)) \subset \Omega^\circ$, wobei $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen ist, da f stetig ist. Da $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(\Omega)$, ist $x \in f^{-1}(\Omega)^\circ$.

Sei $x \in f^{-1}(\overline{\Omega})$ beliebig, dann ist $f(x) \in \overline{\Omega}$. Daher $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega: y_n \rightarrow f(x)$, wobei $f^{-1}(y_n) \rightarrow x$ nach Lemma (38.4), da f stetig ist. Da $(f^{-1}(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(\Omega)$ ist $x \in \overline{f^{-1}(\Omega)}$. \square

Lemma 30.16. Für eine Teilmenge $\Omega \subset Y$ und eine offene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$f^{-1}(\Omega^\circ) \supseteq f^{-1}(\Omega)^\circ \quad (30.22)$$

$$f^{-1}(\overline{\Omega}) \supseteq \overline{f^{-1}(\Omega)} \quad (30.23)$$

Beweis. Da f^{-1} stetig ist folgt dies aus Lemma (30.12). \square

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(\Omega)^\circ$, dann $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(\Omega)^\circ \subseteq f^{-1}(\Omega) \Rightarrow f(x) \in f(B_\varepsilon(x)) \subset \Omega$, wobei $f(B_\varepsilon(x))$ offen ist, da f offen ist. Damit ist $f(x) \in \Omega^\circ \Rightarrow x \in f^{-1}(\Omega)$.

Sei $x \in \overline{f^{-1}(\Omega)}$, dann $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(\Omega): x_n \rightarrow x$, wobei $f(x_n) \rightarrow f(x)$ nach Lemma (38.3), da f offen ist. Da $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ ist $f(x) \in \overline{\Omega} \Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(\Omega)}$. \square

30.3 Rand

Definition 30.17 (Rand). *Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $\Omega \subset X$ ist ihr Abschluss ohne ihr Inneres:*

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ \quad (30.24)$$

ihr Rand.

Das Innere ist der Unterraum ohne den Rand und der Abschluss ist der Unterraum mit dem Rand. Die hinteren Gleichungen folgen direkt aus Identitäten der Mengenlehre, die vorderen aus der Inklusion $\Omega^\circ \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}$:

$$\Omega^\circ = \Omega \setminus \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega \quad (30.25)$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega^\circ \cup \partial\Omega \quad (30.26)$$

Ein Unterraum mit leerem Rand wird *randlos* genannt. Mit den Lemmata (30.2) und (30.7) folgt:

Korollar 30.18. *Die randlosen Teilmengen sind genau die abgeschlossenen Teilmengen.*

Der Rand besteht aus all den Punkten, die sowohl im Abschluss von Ω als auch Ω^c liegen, da mit Korollar (30.9):

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \overline{\Omega} \cap (\Omega^\circ)^c = \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c} \quad (30.27)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $\partial(\Omega^c) = \partial\Omega$. Als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen folgt ebenfalls:

Korollar 30.19. *Der Rand ist abgeschlossen.*

$$(\partial\Omega)^c = (\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c})^c = \overline{\Omega^c} \cup \overline{\Omega}^c = \Omega^\circ \cup (\Omega^c)^\circ \quad (30.28)$$

Aus der Anwendung des Abschlussoperators auf die Inklusion $\Omega^\circ \subseteq \Omega$ folgt $\overline{\Omega^\circ} \subseteq \overline{\Omega}$ mit dessen Monotonie nach Lemma (30.8). Aus der Anwendung des Inneren auf die Inklusion $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$ folgt $\Omega^\circ \subseteq \overline{\Omega}^\circ$ mit dessen Monotonie nach Lemma (30.3). Für den Rand des Inneren und Abschlusses folgen mit der Idempotenz aus den Lemmata (30.8) und (30.3) die Inklusionen:

$$\partial(\Omega^\circ) = \overline{\Omega^\circ} \setminus (\Omega^\circ)^\circ \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \partial\Omega \quad (30.29)$$

$$\partial\overline{\Omega} = \overline{\overline{\Omega}} \setminus \overline{\Omega}^\circ \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \partial\Omega \quad (30.30)$$

Die Inklusionen können echt sein, wie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit $\emptyset \subset \mathbb{R}$ in beiden Fällen bestätigt.

Beispiel 30.20. *Es stimmt nicht, dass für eine offene Menge $U = \overline{U}^\circ$ gilt; ein Gegenbeispiel ist $U = (-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Es stimmt ebenfalls nicht, dass für eine abgeschlossene Menge $A = \overline{A}^\circ$ gilt; ein Gegenbeispiel ist $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$. Jedoch gelten die Inklusionen:*

$$U = U^\circ \subseteq \overline{U}^\circ \quad (30.31)$$

$$A = \overline{A} \supseteq \overline{A}^\circ \quad (30.32)$$

Lemma 30.21. *Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann ist $\overline{A}^\circ \cap \overline{B}^\circ = \emptyset$.*

Beweis. Sei $x \in \overline{A}^\circ \cap \overline{B}^\circ$, dann ist $x \in \overline{A}$ und $x \in \overline{B}$. Da \overline{B}° und \overline{A}° jeweils Umgebungen von x sind folgt $A \cap \overline{B}^\circ \neq \emptyset$ und $\overline{A}^\circ \cap B \neq \emptyset$. XXXX \square

Lemma 30.22. *Für einen topologischen Raum X und Teilmengen $A, B \subset X$ ist:*

$$\partial(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B) \subseteq \partial A \cup \partial B \quad (30.33)$$

$$\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A \cap \overline{B}^c) \cup (\overline{A}^c \cap \partial B) \subseteq \partial A \cup \partial B \quad (30.34)$$

Die erste Inklusion in der ersten Gleichung kann echt sein, wie $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit $\emptyset \subset \mathbb{R}$ bestätigen. Die erste Inklusion in der zweiten Gleichung kann echt sein, wie $\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$ mit $\emptyset \subset \{0\}$ bestätigen.

Beweis. Mit Gleichung (30.27) und Lemma (30.10) ist:

$$\begin{aligned} \partial(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{(A \cap B)}^c = \overline{A \cap B} \cap \overline{A^c \cup B^c} \subseteq \overline{A \cap B} \cap (\overline{A^c} \cup \overline{B^c}) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{B^c}) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B) \end{aligned} \quad (30.35)$$

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)}^c = \overline{A \cup B} \cap \overline{A^c \cap B^c} \subseteq (\overline{A \cup B}) \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c} \\ &= (\overline{A} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}) \cup (\overline{A^c} \cap \overline{B} \cap \overline{B^c}) = (\partial A \cap \overline{B^c}) \cup (\overline{A^c} \cap \partial B) \end{aligned} \quad (30.36)$$

\square

Der Rand des Randes und der Raum müssen nicht unbedingt übereinstimmen, etwa sind $\partial([0; 1] \cap \mathbb{Q}) = [0; 1]$ und $\partial\partial([0; 1] \cap \mathbb{Q}) = \partial[0; 1] = \{0; 1\}$.

Lemma 30.23. *Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$ ist:*

$$(\partial\overline{\Omega})^\circ = \emptyset \quad (30.37)$$

$$\partial\partial\partial\Omega = \partial\partial\Omega \quad (30.38)$$

Beweis. Sei $x \in (\partial\overline{\Omega})^\circ \subseteq \partial\overline{\Omega}$, dann existiert eine offene Umgebung $x \in U \subset \partial\overline{\Omega} \subseteq \overline{\Omega}$. Da $U \cap \overline{\Omega}^c = \emptyset$ ist $x \notin \overline{\Omega}^c$, womit $x \notin \partial\overline{\Omega}$ nach Gleichung (30.27), was ein Widerspruch ist. Alternativ ist mit Gleichung (30.27), Lemma (30.8), Korollar (30.9) und Lemma (30.4):

$$(\partial\overline{\Omega})^\circ = \left(\overline{\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}^c} \right)^\circ = \left(\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}^c \right)^\circ = \overline{\Omega}^\circ \cap \overline{\Omega}^{\circ c} \subseteq \overline{\Omega}^\circ \cap \overline{\Omega}^c = \emptyset \quad (30.39)$$

Da der Rand nach Korollar (30.19) abgeschlossen ist, folgt $(\partial\partial\Omega)^\circ = (\partial\overline{\partial\Omega})^\circ = \emptyset$, also $\partial\partial\partial\Omega = \overline{\partial\partial\Omega} \setminus (\partial\partial\Omega)^\circ = \partial\partial\Omega$. \square

Satz 30.24. *Für topologische Räume X und Y sowie Teilräume $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt:*

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B) \quad (30.40)$$

Beweis. Mit den Lemmata (30.11) und (30.5)

$$\begin{aligned}
 \partial(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus (A \times B)^\circ = (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (A^\circ \times B^\circ) = (\overline{A} \times \overline{B}) \cap (A^\circ \times B^\circ)^c \\
 &= (\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left(((A^\circ)^c \times Y) \cup (X \times (B^\circ)^c) \right) \\
 &= (\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left((\overline{A}^c \times Y) \cup (X \times \overline{B}^c) \right) \\
 &= \left((\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{A}^c \times Y) \right) \cup \left((\overline{A} \times \overline{B}) \cap (X \times \overline{B}^c) \right) \\
 &= \left((\overline{A} \cap \overline{A}^c) \times (\overline{B} \times Y) \right) \cap \left((\overline{A} \cap X) \times (\overline{B} \times \overline{B}^c) \right) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)
 \end{aligned} \tag{30.41}$$

□

Kapitel 31

Isolierte Punkte und Häufungspunkte

Definition 31.1 (Isolierter Punkt). Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raumes (X, \mathcal{O}_X) ist ein Punkt $p \in M$ für den es eine Umgebung gibt die nur p enthält, also für den:

$$p \notin \overline{M \setminus \{p\}} \quad (31.1)$$

ein isolierter Punkt.

Die Menge aller isolierten Punkt wird als:

$$\text{iso}(M) := \{p \in M \mid p \notin \overline{M \setminus \{p\}}\} \quad (31.2)$$

bezeichnet. Ist $M = \text{iso}(M)$ wird die Menge M *isoliert* genannt.

Definition 31.2 (Häufungspunkt). Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raumes (X, \mathcal{O}_X) ist ein Punkt $p \in M$ für den es keine Umgebung gibt die nur p enthält, also für den:

$$p \in \overline{M \setminus \{p\}} \quad (31.3)$$

ein Häufungspunkt.

Ein Punkt ist also genau dann ein Häufungspunkt, wenn er kein isolierter Punkt ist. Die Menge aller Häufungspunkt wird als:

$$\text{acc}(M) := \{p \in M \mid p \in \overline{M \setminus \{p\}}\} \quad (31.4)$$

bezeichnet. Die Menge M zerfällt nun disjunkt in die Menge ihrer isolierten und die Menge ihrer Häufungspunkte:

$$M = \text{iso}(M) \dot{\cup} \text{acc}(M) \quad (31.5)$$

Kapitel 32

Umgebungen

Definition 32.1 (Umgebung). Für einen topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$ ist eine Menge $x \in M \subseteq X$, für die eine offene Menge $x \in U \subseteq M$ existiert eine Umgebung von x .

Die Menge aller Umgebungen von x wird als $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet, sie ist ein Mengenfiter.

Definition 32.2 (Umgebungsbasis). Für einen topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}(x)$, für die $\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$ (32.1) eine Umgebungsbasis.

Kapitel 33

Zusammenhängende Räume

Für geometrische Formen im euklidischen Raum oder abstraktere Graphen existiert anschaulich ein Verständnis von Zusammenhang. Dieses greift auf eine mögliche Zerlegung des untersuchten Objektes in elementarere Teile zurück. Für topologische Räume ist eine analoge Definition trotz der abstrakteren Definition ebenfalls möglich, für die elementareren Teile kommen dabei nur die offenen Mengen infrage.

Definition 33.1 (Zusammenhängender Raum). *Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) , der sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte und offene Teilmengen aufteilen lässt:*

$$\nexists U, V \in \mathcal{O}_X : U, V \neq \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset \wedge U \cup V = X, \quad (33.1)$$

wird zusammenhängend genannt.

Bemerkung 33.2. *Die leere Menge \emptyset ist gemäß dieser Definition nicht zusammenhängend.*

Eine analoge Definition für σ -Algebren, die genau wie Topologien ebenfalls Mengensysteme sind, ist dagegen nicht sinnvoll, da deren Definition beinhaltet, dass für jede Menge ebenfalls ihr Komplement enthalten ist.

Beispiel 33.3. *Teilmengen von (weg)zusammenhängenden Räumen müssen (mit der Teilraumtopologie) nicht (weg)zusammenhängend sein, etwa $(-1, 0) \cup (0, 1) \subset (-1, 1)$.*

Beispiel 33.4. *Teilmengen von wegzusammenhängenden Räumen müssen (mit der Teilraumtopologie) nicht wegzusammenhängend sein. XXXX*

Lemma 33.5. *$[0, 1]$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Lemma 33.6. *Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn das Bild jeder stetigen Abbildung $X \rightarrow \{0; 1\}$ genau ein Element enthält.*

$\{0; 1\}$ trägt dabei die diskrete Topologie, also die Teilraumtopologie der kanonischen Topologie auf \mathbb{R} . Es kann $X \neq \emptyset$ angenommen werden, da \emptyset nicht zusammenhängend ist und kein Element im Bild der eindeutigen Abbildung $\emptyset \xrightarrow{!} \{0; 1\}$ liegt.

Beweis. \Rightarrow : Sei $f: X \rightarrow \{0; 1\}$ stetig mit beiden Elementen im Bild, dann sind $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $f^{-1}(1) \neq \emptyset$ disjunkte offene Teilmengen von X . \Leftarrow : Sei X nicht zusammenhängend, dann gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $U_1, U_2 \neq \emptyset$ sowie $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$, womit die Abbildung:

$$f: X \rightarrow \{0; 1\}, x \mapsto \begin{cases} 0 & , x \in U_1 \\ 1 & , x \in U_2 \end{cases} \quad (33.2)$$

wohldefiniert ist und ihr Bild zwei Elemente enthält. \square

Lemma 33.7. *Für eine nichtleere Familie $(X_i)_{i \in I}$ topologischer Räume ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ genau dann (weg)zusammenhängend, wenn alle X_i (weg)zusammenhängend sind.*

Es kann angenommen werden, dass alle topologischen Räume nichtleer sind, andernfalls gilt die Äquivalenz, da beide Seiten falsch sind.

Beweis. wegzsmh: \Rightarrow : XXXX \Leftarrow : XXXX zsmh: \Rightarrow : Wäre X_i nicht zusammenhängend, gäbe es nach Lemma (33.6) eine Abbildung $f: X_i \rightarrow \{0; 1\}$ mit $\text{img}(f) = \{0; 1\}$ und daher eine Abbildung $f \circ \text{pr}_i: X \rightarrow \{0; 1\}$ mit $\text{img}(f \circ \text{pr}_i) = \{0; 1\}$, womit X nach Lemma (33.6) nicht zusammenhängend wäre. \Leftarrow : XXXX \square

Lemma 33.8. *Für eine nichtleere Familie $(X_i)_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume ist $X = \bigvee_{i \in I} X_i$ genau dann (weg)zusammenhängend, wenn alle X_i (weg)zusammenhängend sind.*

Beweis. wegzsmh: \Rightarrow : Folgt aus Korollar (33.14) mit $X_j \cong \bigvee_{i \in I} X_i / \bigvee_{i \in I, i \neq j} X_i$. \Leftarrow : XXXX zsmh: \Rightarrow : Folgt aus Korollar (33.14) mit $X_j \cong \bigvee_{i \in I} X_i / \bigvee_{i \in I, i \neq j} X_i$. \Leftarrow : XXXX \square

Lemma 33.9. *Für einen topologischen Raum X und eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ (weg)zusammenhängender Teilmengen ist $\bigcap_{i \in I} X_i$ (weg)zusammenhängend.*

Beweis. XXXX \square

Lemma 33.10. *Für einen topologischen Raum X und eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ (weg)zusammenhängender Teilmengen, für die $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, ist $\bigcup_{i \in I} X_i$ (weg)zusammenhängend.*

Beweis. XXXX \square

Satz 33.11 (Hauptsatz des Zusammenhangs). *Für topologische Räume X und Y mit ersterem (weg)zusammenhängend sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f(X) \subseteq Y$ (weg)zusammenhängend.*

Beweis. wegzsmh: Seien $y, y' \in f(X)$, dann gibt es $x, x' \in X$ mit $f(x) = y$ und $f(x') = y'$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$, damit ist $f \circ \gamma: [0; 1] \rightarrow f(X)$ nach Lemma (27.3) ein Weg mit $(f \circ \gamma)(0) = y$ und $(f \circ \gamma)(1) = y'$.

zsmh: Seien $U, V \subseteq f(X)$ offen und disjunkt, dann sind $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subseteq X$ offen und disjunkt, womit o.B.d.A. $f^{-1}(U) = \emptyset$ und $U = \emptyset$. \square

Da Retraktionen stets surjektiv sind, folgt direkt:

Korollar 33.12. *Retrakte von (weg)zusammenhängenden Räumen sind (weg)zusammenhängend.*

Korollar 33.13. *Gibt es für topologische Räume X und Y mit X (weg)zusammenhängend eine surjektive und stetige Abbildung $X \rightarrow Y$, dann ist Y (weg)zusammenhängend.*

Korollar 33.14. Für einen (weg)zusammenhängenden topologischen Raum X und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist X/Y (weg)zusammenhängend.

Aus Lemma (33.7) und Korollar (33.14) folgt direkt:

Korollar 33.15. Das Smash-Produkt (weg)zusammenhängender punktierter Räume ist (weg)zusammenhängend.

Lemma 33.16. Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn der Funktor:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, -): \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (33.3)$$

alle Koproducte erhält.

Beweis. \Rightarrow : XXXX \Leftarrow : Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \{0; 1\}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \{0\} + \{1\}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \{0\}) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \{1\}) \\ &= \{\mathrm{const}_0\} + \{\mathrm{const}_1\} = \{\mathrm{const}_0, \mathrm{const}_1\}, \end{aligned} \quad (33.4)$$

womit aus Lemma (33.6) folgt, dass X zusammenhängend ist. \square

33.1 Global zusammenhängende Räume

Definition 33.17 (total unzusammenhängend). Ein topologischer Raum, für den jede Zusammenhangskomponente nur einen Punkt enthält, wird total unzusammenhängend genannt.

Da der einelementige topologische Raum zugleich zusammenhängend als auch total unzusammenhängend ist, wird in der Definition für letzteres oft gefordert, dass der Raum mindestens zwei Elemente hat.

Beispiel 33.18. Die diskrete Topologie ist total unzusammenhängend.

Definition 33.19 (total wegunzusammenhängend). Ein topologischer Raum, für den jede Wegzusammenhangskomponente nur einen Punkt enthält, wird total wegunzusammenhängend genannt.

Lemma 33.20. Total unzusammenhängende Räume sind total wegunzusammenhängend.

Beweis. Eine Wegzusammenhangskomponente mit mehr als einem Punkt wäre nach Lemma (33.23) eine Zusammenhangskomponente mit mehr als einem Punkt. \square

Definition 33.21 (wegzusammenhängend).

Lemma 33.22. $[0, 1]$ ist wegunzusammenhängend.

Beweis. Für $x, y \in [0; 1]$ sei $\gamma: [0; 1] \rightarrow x + t(y - x)$. \square

Lemma 33.23. Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend.

Beweis. Sei X ein wegunzusammenhängend und nicht zusammenhängender topologischer Raum, dann gibt es nichtleere, disjunkte und offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cup V = X$. Sei $x \in U$ und $y \in V$, dann gibt es einen Weg $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Mit der Aufteilung $[0; 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ folgt, dass $[0; 1]$ nicht zusammenhängend ist im Widerspruch zu Lemma (33.22). \square

Definition 33.24 (einfach zusammenhängend).

33.2 Zusammenhangskomponenten

Sei X ein topologischer Raum. Für Punkte $x, y \in X$ sei $x \overset{c}{\sim} y$, wenn es keine nichtleeren offenen Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$ sowie $x \in U$ und $y \in V$ gibt. Die Relation ist per Definition reflexiv und symmetrisch sowie transitiv wegen Lemma (XXXX). Für $x \in X$ wird dessen Äquivalenzklasse $[x]_c$ seine *Zusammenhangskomponente* genannt.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y induziert eine Abbildung zwischen Mengen:

$$f_c: X / \overset{c}{\sim} \rightarrow Y / \overset{c}{\sim}, [x]_c \mapsto [f(x)]_c. \quad (33.5)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn wäre $f(x) \overset{c}{\not\sim} f(x')$ für Punkte $x, x' \in X$, dann gäbe es nichtleere offene Teilmengen $U', V' \subset Y$ mit $U' \cap V' = \emptyset$ und $U' \cup V' = Y$ sowie $f(x) \in U'$ und $f(x') \in V'$. Da f stetig ist, gäbe es nichtleere offene Teilmengen $U = f^{-1}(U'), V = f^{-1}(V') \subset X$ mit $U \cap V = f^{-1}(U') \cap f^{-1}(V') = f^{-1}(U' \cap V') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $U \cup V = f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V') = f^{-1}(U' \cup V') = f^{-1}(Y) = X$ sowie $x \in U$ und $x' \in V$, womit $x \overset{c}{\not\sim} x'$.

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\text{Cid}_X = \text{id}_{\text{C}(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\text{C}(g \circ f) = \text{C}(g) \circ \text{C}(f)$.

Korollar 33.25. *Der Übergang auf die Zusammenhangskomponenten:*

$$\text{C}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, X \mapsto X / \sim_c, f \mapsto f_c \quad (33.6)$$

ist ein kovarianter Funktor.

33.3 Wegzusammenhangskomponenten

Sei X ein topologischer Raum. Für Punkte $x, y \in X$ sei $x \overset{pc}{\sim} y$, wenn es einen stetigen Weg $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Die Relation ist reflexiv aufgrund des konstanten Weges, symmetrisch aufgrund des inversen Weges und transitiv aufgrund von Lemma (XXXX). Für $x \in X$ wird dessen Äquivalenzklasse $[x]_{pc}$ seine *Wegzusammenhangskomponente* genannt.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y induziert eine Abbildung zwischen Mengen:

$$f_{pc}: X / \overset{pc}{\sim} \rightarrow Y / \overset{pc}{\sim}, [x]_{pc} \mapsto [f(x)]_{pc}. \quad (33.7)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ zwischen zwei Punkten $x, x' \in X$ der Weg $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen $f(x), f(x') \in Y$ existiert.

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{X/\sim} \quad (33.8)$$

Korollar 33.26. *Für topologische Räume X, Y und Z und stetige Abbildungen $f \in \text{C}(Y, Z)$ und $g \in \text{C}(X, Y)$ ist $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, da:*

$$\begin{aligned} \forall x \in X: (f \circ g)_*([x]) &= [(f \circ g)(x)] = [f(g(x))] \\ &= f_*([g(x)]) = f_*(g_*([x])) = (f_* \circ g_*)([x]) \end{aligned} \quad (33.9)$$

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\text{PC id}_X = \text{id}_{\text{PC}(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\text{PC}(g \circ f) = \text{PC}(g) \circ \text{PC}(f)$.

Korollar 33.27. *Der Übergang auf die Wegzusammenhangskomponenten:*

$$\text{PC}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, X \mapsto X / \sim_{\text{pc}}, f \mapsto f_{\text{pc}} \quad (33.10)$$

ist ein kovarianter Funktor.

Definition 33.28 (Nullte Betti-Zahl). *Für einen topologischen Raum X ist die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten:*

$$b_0(X) := |X / \sim_{\text{pc}}| \quad (33.11)$$

seine nullte Betti-Zahl.

Lemma 33.29. *Homotopieäquivalente topologische Räume haben gleiche nullte Betti-Zahlen.*

Beweis. Seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume sowie $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ Homotopieäquivalenzen. Mit Korollar (33.8) und Gleichung (33.26) ist:

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{X/\sim} \quad (33.12)$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{Y/\sim}, \quad (33.13)$$

womit $f_*: X/\sim \leftrightarrow Y/\sim: g_*$ Bijektionen sind. \square

33.4 Lokal (weg)zusammenhängende Räume

Definition 33.30 (lokal (weg)zusammenhängend). *Ein topologischer Raum X , für den jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine offene (weg)zusammenhängende Umgebung enthält, ist lokal (weg)zusammenhängend in $x \in X$ und falls dies für jeden Punkt $x \in X$ gilt, lokal (weg)zusammenhängend.*

Aus Lemma (33.23) folgt direkt:

Korollar 33.31. *Lokal wegzusammenhängende Räume sind lokal zusammenhängend.*

Beispiel 33.32. *Zusammenhängende Räume müssen nicht lokal zusammenhängend sein! Beispiele sind die Warschauer Sinuskurve (siehe Lemma (XXXX) im Anhang oder ebenso [1], Bemerkung 6 auf Seite 215) oder der Besen-Raum (siehe Lemma (XXXX) im Anhang).*

Dieses Gegenbeispiel entstammt der Tatsache, dass sich die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, nach Beispiel (33.3) nicht auf Unterräume vererbt.

Beispiel 33.33. *Wegzusammenhängende Räume müssen nicht lokal wegzusammenhängend sein! Etwa ist der topologische Kamm wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend. Siehe Lemma (XXXX) im Anhang.*

Dieses Gegenbeispiel entstammt der Tatsache, dass sich die Eigenschaft, wegzusammenhängend zu sein, nach Beispiel (33.4) nicht auf Unterräume vererbt.

Lemma 33.34. *Für einen lokal (weg)zusammenhängenden und kompakten topologischen Raum X gibt es eine endliche Teilmenge $A \subset X$, sodass X/A (weg)zusammenhängend ist.*

Beweis. Da X lokal zusammenhängend ist, gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene zusammenhängende Umgebung $x \in U_x \subset X$, also ist $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $A \subset X$, sodass $(U_x)_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von X ist. Sei $p: X \rightarrow X/A$ die kanonische Projektion, dann ist $(p(U_x))_{x \in A}$ eine (offene) Überdeckung von X/A durch (weg)zusammenhängende Teilmengen nach dem Hauptsatz (33.11) des Zusammenhangs. Da diese alle den Punkt $p(A)$ enthalten, folgt aus Lemma (33.10), dass X/A (weg)zusammenhängend ist. \square

Definition 33.35 (lokal einfach zusammenhängend). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung jeden Punktes eine einfach zusammenhängende Umgebung dieses Punktes enthält, ist lokal einfach zusammenhängend.*

Definition 33.36 (semilokal einfach zusammenhängend).

Die Rückrichtung von Lemma (33.23), dass wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind, gilt mit der zusätzlichen Bedingung des lokalen Wegzusammenhangs:

Lemma 33.37. *Ein topologischer Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend ist.*

Beweis. \Rightarrow : Folgt aus Korollar (XXXX) und Lemma (33.23).

\Leftarrow : Sei X ein lokal wegzusammenhängender und zusammenhängender topologischer Raum sowie $x \in X$ ein Punkt mit Wegzusammenhangskomponente $[x]_{\text{pc}} \subseteq X$.

Sei $y \in [x]_{\text{pc}}$, dann existiert ein Weg γ von x nach y sowie, da X lokal wegzusammenhängend ist, eine offene und wegzusammenhängende Umgebung $U \in \mathcal{U}(y)$. Für jedes $z \in U$ gibt es daher einen Weg δ von y nach z . Nun ist $\delta * \gamma$ nach Lemma (XXXX) ein Weg von x nach z , womit $z \in [x]_{\text{pc}}$, also $U \subset [x]_{\text{pc}}$, also $[x]_{\text{pc}}$ offen ist.

Sei $z \in \overline{[x]_{\text{pc}}}$, dann gibt es eine offene und wegzusammenhängende Umgebung $U \in \mathcal{U}(z)$ und einen Punkt $y \in [x]_{\text{pc}} \cap U$, also einen Weg γ von x nach y und einen Weg δ von y nach z . Nun ist $\delta * \gamma$ nach Lemma (XXXX) ein Weg von x nach z , womit $z \in [x]_{\text{pc}}$, also $[x]_{\text{pc}}$ abgeschlossen ist.

Da $[x]_{\text{pc}}$ offen und abgeschlossen ist sowie wegen $x \in [x]_{\text{pc}}$ nicht leer, ist $[x]_{\text{pc}} = X$, da X zusammenhängend ist. \square

Lemma 33.38. *Offene Teilmengen von lokal wegzusammenhängenden Räumen sind genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend sind.*

Beweis. \Leftarrow : Folgt aus Lemma (33.23). \Rightarrow : Sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum und $U \subseteq X$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge. XXXX \square

Beispiel 33.39. $(-1; 0) \cup (0; 1)$ ist lokal (weg)zusammenhängend, aber nicht (weg)zusammenhängend.

Lemma 33.40. *Für eine stetige Surjektion $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume mit X lokal (weg)zusammenhängend ist Y lokal (weg)zusammenhängend.*

Beweis. XXXX \square

Da Retraktionen stets surjektiv sind, folgt direkt:

Korollar 33.41. *Retrakte von lokal (weg)zusammenhängenden Räumen sind lokal (weg)zusammenhängend.*

Satz 33.42 (Hauptsatz des Zusammenhangs, lokal). *Für topologische Räume X und Y mit ersterem lokal (weg)zusammenhängend in einem Punkt $x \in X$ sowie eine offene und stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f(X) \subseteq Y$ lokal (weg)zusammenhängend in $f(x) \in Y$.*

Beweis. Da X in x lokal (weg)zusammenhängend ist, gibt es eine offene (weg)zusammenhängende Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$. Nach XXXX ist $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$ eine offene (weg)zusammenhängende Umgebung und daher Y lokal (weg)zusammenhängend in $f(x)$. \square

33.5 Schwach lokal (weg)zusammenhängende Räume

Definition 33.43 (schwach lokal (weg)zusammenhängend). *Ein topologischer Raum X , für den jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine (weg)zusammenhängende Umgebung enthält, ist schwach lokal (weg)zusammenhängend in $x \in X$ und falls dies für jeden Punkt $x \in X$ gilt, schwach lokal (weg)zusammenhängend.*

Korollar 33.44. *Lokal (weg)zusammenhängende Räume sind schwach lokal (weg)zusammenhängend.*

Satz 33.45 (Hauptsatz des Zusammenhangs, schwach lokal). *Für topologische Räume X und Y mit ersterem schwach lokal (weg)zusammenhängend in einem Punkt $x \in X$ sowie eine offene und stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f(X) \subseteq Y$ schwach lokal (weg)zusammenhängend in $f(x) \in Y$.*

Beweis. Da X in x schwach lokal (weg)zusammenhängend ist, gibt es eine (weg)zusammenhängende Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$. Nach XXXX ist $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$ eine (weg)zusammenhängende Umgebung und daher Y schwach lokal (weg)zusammenhängend in $f(x)$. \square

33.6 Hyperzusammenhängende Räume

Definition 33.46 (Hyperzusammenhängender Raum). XXXX

Lemma 33.47. *Offene Teilmengen von hyperzusammenhängenden Räumen sind hyperzusammenhängend.*

Beweis. Sei X ein hyperzusammenhängender Raum und $U \subseteq X$ offen. XXXX \square

Lemma 33.48. *Hyperzusammenhängende Räume sind zusammenhängend und lokal zusammenhängend.*

Beweis. XXXX \square

Beispiel 33.49. *Hyperzusammenhängende Räume sind nicht unbedingt wegzusammenhängend oder lokal wegzusammenhängend, etwa XXXX.*

Lemma 33.50. *Stetige Bilder von hyperzusammenhängenden Räumen sind hyperzusammenhängend.*

Beweis. XXXX \square

33.7 Ultrazusammenhängende Räume

Definition 33.51 (Ultrazusammenhängender Raum). *XXXX*

Lemma 33.52. *Ultrazusammenhängende Räume sind wegzusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Beispiel 33.53. *Hyperzusammenhängende Räume müssen nicht ultrazusammenhängend sein. [1, Gegenbsp. 18-22, 53, 54, 56]*

Beispiel 33.54. *Ultrazusammenhängende Räume müssen nicht hyperzusammenhängend sein. [1, Gegenbsp. 12-14, 57]*

Kapitel 34

Kombination von offenen und abgeschlossenen Mengen

34.1 G_δ - und F_σ -Mengen

Schnitte von unendlich vielen offenen Mengen müssen nicht unbedingt offen und Vereinigungen von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen müssen nicht unbedingt abgeschlossen sein. Es stellt sich jedoch heraus, dass zumindest abzählbar unendliche Schnitte von offenen Mengen und abzählbar unendliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen besonders genug für eine weiterführende Betrachtung sind.

Definition 34.1 (G_δ -Menge). Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) ist eine Teilmenge $G \subset X$ eine G_δ -Menge, wenn sie der Schnitt von abzählbar unendlich vielen offenen Mengen $G_n \in \mathcal{O}_X, n \in \mathbb{N}$ ist:

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n. \quad (34.1)$$

Das G kommt von *Gebiet*, welches Felix Hausdorff als Bezeichnung für offene Mengen benutzte, und das δ steht für Durchschnitt. Da in einer Topologie nur der endliche Schnitt von offenen Mengen wieder offen ist, muss nicht unbedingt $G \in \mathcal{O}_X$ gelten.

Definition 34.2 (F_σ -Menge). Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) ist eine Teilmenge $F \subset X$ eine F_σ -Menge, wenn sie die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen $F_n \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}, n \in \mathbb{N}$ ist:

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n. \quad (34.2)$$

Das F kommt von franz. *fermé* für abgeschlossen und σ steht für franz. *somme* für Summe. Da in einer Topologie nur die endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist, muss nicht unbedingt $F \in \mathcal{O}_X^{\text{cl}}$ gelten.

Proposition 34.3. Eine Menge ist genau dann eine G_δ -Menge, wenn ihr Komplement eine F_σ -Menge ist.

Definition 34.4 (G_δ -Raum). Ein topologischer Raum, in dem jede abgeschlossene Teilmenge eine G_δ -Teilmenge oder äquivalent jede offene Teilmenge eine F_σ -Teilmenge ist, wird G_δ -Raum genannt.

Definition 34.5 (P-Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede G_δ -Teilmenge offen oder äquivalent jede F_σ -Teilmenge abgeschlossen ist, wird P-Raum genannt.*

Definition 34.6 (Alexnadroff-Raum). *Ein topologischer Raum, in dem beliebige Schnitte von offenen Teilmengen wieder offen oder äquivalent beliebige Vereinigungen von abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen ist, wird Alexandroff-Raum genannt.*

34.2 Lokal abgeschlossene Teilmengen und (schwach) submaximale Räume

Lemma 34.7. *Für eine Teilmenge X eines topologischen Raumes (Y, \mathcal{O}_Y) sind äquivalent:*

I.) XXXX

Beweis. XXXX □

Definition 34.8 (Lokal abgeschlossene Teilmenge). *Eine Teilmenge eines topologischen Raumes, für welche die äquivalenten Bedingungen aus Lemma (XXXX) gelten, wird lokal abgeschlossen genannt.*

Definition 34.9 (Submaximaler Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede Teilmenge lokal abgeschlossen ist, wird submaximal genannt.*

Definition 34.10 (Schwach submaximaler Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede endliche Teilmenge lokal abgeschlossen ist, wird schwach submaximal genannt.*

Korollar 34.11. *Jeder submaximale Raum ist schwach submaximal.*

Lemma 34.12. *Urbilder von lokal abgeschlossenen Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind lokal abgeschlossen.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) sowie $Z \subseteq Y$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine offene Teilmenge $U \in \mathcal{O}_Y$ und eine abgeschlossene Teilmenge $A \in \mathcal{O}_Y^c$ mit $Z = U \cap A$. Da Urbilder mit Schnitten vertauschen sowie Urbilder von offenen Teilmengen offen und von abgeschlossenen Teilmengen nach Lemma (27.4) abgeschlossen sind, folgt:

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}(U \cap A) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\in \mathcal{O}_X} \cap \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{O}_X^c} \quad (34.3)$$

□

Lemma 34.13. *Lokalkompakte Unterräume von Hausdorff-Räumen sind als Teilmengen lokal abgeschlossen. [3] [4, 1.]*

Beweis. XXXX □

Lemma 34.14. *Unterräume von lokalkompakten Hausdorff-Räumen sind genau dann lokalkompakt, wenn diese als Teilmengen lokal abgeschlossen sind. [3] [4, 2.]*

Beweis. XXXX □

Lemma 34.15. *Ein vollständig regulärer topologischer Raum ist genau dann lokalkompakt, wenn lokal abgeschlossen in dessen Stone-Čech-Kompaktifizierung. [3] [4, 3.]*

Beweis. XXXX □

Lemma 34.16. *Lokal abgeschlossene Teilmengen von vollständig regulären und Čech-vollständigen topologischen Räumen sind als Unterräume ebenfalls Čech-vollständig. [3] [4, 4.]*

Beweis. XXXX □

34.3 Konstruierbare Teilmengen

Definition 34.17 (Konstruierbare Menge). *Eine Teilmenge eines topologischen Raumes, die eine endliche Vereinigung von lokal abgeschlossenen Mengen ist, wird konstruierbar genannt.*

Lemma 34.18. *Die konstruierbaren Teilmengen eines topologischen Raumes bilden eine Boolesche Algebra. Endliche Schnitte und endliche Vereinigungen sowie Komplemente von konstruierbaren Mengen sind konstruierbar.*

Beweis. Seien X ein topologischer Raum und $(Z_i)_{i \in I} \subset X$ eine endliche Familie an konstruierbaren Teilmengen, dann gibt es für jedes Z_i offene Mengen $(U_j)_{j \in J_i} \subseteq X$ und abgeschlossene Mengen $(A_j)_{j \in J_i} \subseteq X$ mit J_i endlich, sodass $Z_i = \bigcup_{j \in J_i} (U_j \cap A_j)$. Nun gilt:

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \tag{34.4}$$

$$\bigcup_{i \in I} Z_i = \tag{34.5}$$

□

Lemma 34.19. *Urbilder von konstruierbaren Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind konstruierbar.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) sowie $Z \subseteq Y$ eine konstruierbare Menge. Dann gibt es eine endliche Familie $(L_i)_{i \in I} \subseteq X$ an lokal abgeschlossenen Teilmengen mit $Z = \bigcup_{i \in I} L_i$. Da Urbilder mit Vereinigungen vertauschen sowie Urbilder von lokal abgeschlossenen Teilmengen nach Lemma (34.12) lokal abgeschlossen sind, folgt:

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(L_i). \tag{34.6}$$

□

Kapitel 35

Metrisierbarkeit

Metrische Räume induzieren stets topologische Räume, die Umkehrung gilt jedoch nicht unbedingt. Für einen gegebenen topologischen Raum kann daher untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Topologie von einer Metrik induziert wird.

Definition 35.1 (Metrisierbarkeit). *Ein topologischer Raum, für den eine die Topologie induzierende Metrik existiert, wird metrisierbar genannt. Existiert sogar eine vollständige Metrik wird er vollständig metrisierbar (oder topologisch vollständig) genannt.*

Definition 35.2 (Lokale Metrisierbarkeit). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine metrisierbare Umgebung besitzt, wird lokal metrisierbar genannt.*

Beispiel 35.3. *XXXX ist lokal metrisierbar, aber nicht (global) metrisierbar.*

Korollar 35.4. *Jeder metrisierbare topologische Raum ist lokal metrisierbar.*

35.1 G_δ -Satz von Hausdorff und Satz von Mazurkiewicz

Satz 35.5 (G_δ -Satz von Hausdorff). *In einem vollständigen metrischen Raum ist eine G_δ -Teilmenge stets vollständig metrisierbar.*

Der Satz wurde im Jahr 1924 von Paul Alexandroff für den Spezialfall zusätzlich separabler (also polnischer) Räume [5] und ebenso im Jahr 1924 von Felix Hausdorff auch für nichtseparable Räume bewiesen [6].

Beweis. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Omega \subseteq M$ eine G_δ -Teilmenge. XXXX □

Satz 35.6 (Satz von Mazurkiewicz). *In einem metrischen Raum ist jede vollständig metrisierbare Teilmenge stets eine G_δ -Menge.*

Der Satz wurde im Jahr 1916 von Stefan Mazurkiewicz bewiesen [7].

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\Omega \subseteq M$ eine vollständig metrisierbare Teilmenge. XXXX □

35.2 Satz von Bing–Nagata–Smirnov

Satz 35.7 (Satz von Bing–Nagata–Smirnov). *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

- I.) X ist metrisierbar.
- II.) X ist ein regulärer Hausdorff-Raum mit einer σ -diskreten Basis.
- III.) X ist ein regulärer Hausdorff-Raum mit einer σ -lokalendlichen Basis.

Beweis. XXXX □

Lemma 35.8. *Für einen topologischen Raum X mit abzählbarer Basis sind äquivalent:*

- I.) X ist metrisierbar.
- II.) X ist ein parakompakter Hausdorff-Raum.
- III.) X ist ein normaler Hausdorff-Raum.
- IV.) X ist ein regulärer Hausdorff-Raum.

Beweis. II.) \Rightarrow III.): Folgt aus dem Dieudonné-Theorem (75.13). II.) \Rightarrow IV.): Folgt aus Lemma (74.6). □

35.3 Metrisierbarkeitssatz von Smirnov

Satz 35.9 (Metrisierbarkeitssatz von Smirnov). *Ein topologischer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er ein lokal metrisierbarer und parakompakter Hausdorff-Raum ist.*

Beweis. \Rightarrow : Folgt aus Korollar (35.4), XXXX

\Leftarrow : XXXX □

35.4 Metrisierbarkeitssatz von Urysohn

Satz 35.10 (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn). *Für einen zweitabzählbaren Hausdorff-Raum sind Metrisierbarkeit, Regularität, vollständige Regularität und Normalität äquivalente Eigenschaften.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 36

Abzählbarkeitsaxiome

36.1 Erstes Abzählbarkeitsaxiom

Definition 36.1 (Erstes Abzählbarkeitsaxiom). *Jeder Punkt hat eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis.*

Es besagt also, dass für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine abzählbare Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an Umgebungen, sodass für jede andere Umgebung U :

$$\exists n \in \mathbb{N}: U \subseteq U_n \quad (36.1)$$

Ein topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wird *erstabzählbar* genannt.

Lemma 36.2. *Unterräume von erstabzählbaren topologischen Räumen sind erstabzählbar.*

Beweis. XXXX □

Lemma 36.3. *Endliche Produkte von erstabzählbaren topologischen Räumen sind erstabzählbar.*

Beweis. XXXX □

In allgemeinen topologischen Räumen gelten zwei wichtige Lemmata für Folgen nicht mehr unbedingt. Zum einen stimmt der Abschluss einer Teilmenge nicht mehr unbedingt mit der Menge aller Grenzpunkte aller Folgen in ihr überein, zum anderen erhalten stetige Abbildungen nicht mehr unbedingt Grenzpunkte. (Beides ist später die Motivation für die Verallgemeinerung von Folgen durch Netze, siehe Definition (40.1).) In erstabzählbaren topologischen Räumen gelten diese beiden Lemmata jedoch noch:

Lemma 36.4. *Für einen erstabzählbaren topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \rightarrow x$ existiert.*

Beweis. XXXX □

Lemma 36.5. *Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y mit ersterem erstabzählbar ist genau dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt, dass $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Beweis. XXXX □

36.2 Zweites Abzählbarkeitsaxiom

Definition 36.6 (Zweites Abzählbarkeitsaxiom). *Der Raum hat eine höchstens abzählbare Basis der Topologie.*

Es besagt also, dass eine abzählbare Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an offenen Mengen existiert, sodass für jede Umgebung U jeden Punktes $x \in X$:

$$\exists n \in \mathbb{N}: U \subseteq U_n \quad (36.2)$$

Ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wird *zweitabzählbar* genannt.

Korollar 36.7. *Jeder zweiabzählbare topologische Raum ist erstabzählbar.*

Beispiel 36.8. *Ein überabzählbarer diskreter topologischer Raum ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.*

Beispiel 36.9. *Die lange Linie ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.*

Lemma 36.10. *Unterräume von zweitabzählbaren topologischen Räumen sind zweitabzählbar.*

Beweis. XXXX □

Lemma 36.11. *Endliche Produkte von zweitabzählbaren topologischen Räumen sind zweitabzählbar.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 37

Dichte topologische Räume

Definition 37.1 (Dichte Teilmenge in topologischen Räumen). *Für einen topologischen Raum X liegt eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$, für die $\overline{\Omega} = X$ dicht in diesem.*

Lemma 37.2. *Für topologische Räume X und Y sowie eine dichte Teilmenge $\Omega \subseteq X$ und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f(\Omega)$ dicht in $f(X)$.*

Beweis. Mit Lemma (30.12) ist:

$$\overline{f(\Omega)} \supseteq f(\overline{\Omega}) = f(X), \quad (37.1)$$

womit mit $f(\Omega) \subseteq f(X)$ folgt, dass $\overline{f(\Omega)} = f(X)$. □

Lemma 37.3. *Für topologische Räume X und Y sowie eine dichte Teilmenge $\Omega \subseteq Y$ und eine offene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f^{-1}(\Omega)$ dicht in $f^{-1}(Y)$.*

Beweis. Mit Lemma (30.16) ist:

$$\overline{f^{-1}(\Omega)} \supseteq f^{-1}(\overline{\Omega}) = f^{-1}(Y), \quad (37.2)$$

womit mit $f^{-1}(\Omega) \subseteq f^{-1}(Y)$ folgt, dass $\overline{f^{-1}(\Omega)} = f^{-1}(Y)$. □

Definition 37.4 (Nirgends dichte Teilmenge in topologischen Räumen). *Für einen topologischen Raum X liegt eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$, für die $\overline{\Omega}^\circ = \emptyset$ nirgends dicht in diesem.*

37.1 Blumberg-Räume

Definition 37.5 (Blumberg-Räume). *Ein topologischer Raum X , für den für jede Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (nicht unbedingt stetig) eine dichte Teilmenge $D \subset X$ existiert, sodass $f|_D \in C(D, \mathbb{R})$, ist ein Blumberg-Raum.*

Beispiel 37.6. *Gemäß des Blumberg-Theorems ist \mathbb{R} mit der kanonischen Topologie ein Blumberg-Raum.*

Satz 37.7. *Ein metrischer Raum ist genau dann ein Blumberg-Raum, wenn er ein Baire-Raum ist.*

Beweis. XXXX □

37.2 Seperable Räume

Definition 37.8 (Seperable topologische Räume). *Ein topologischer Raum, für den eine abzählbare dichte Teilmenge existiert, wird seperabel genannt.*

Beispiel 37.9. \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n sind mit der von der euklidischen Norm induzierten Topologie seperabel, da \mathbb{Q}^n bzw. $\mathbb{Q}(i)^n$ abzählbare dichte Teilmengen sind.

Dass Teilmengen seperabler topologischer Räume (mit der Teilraumtopologie) wieder seperabel sind, also die Verallgemeinerung von Lemma (10.7) für metrische Räume, gilt im Allgemeinen nicht.

37.3 Polnische Räume

Definition 37.10 (Polnischer Raum). *Ein topologischer Raum, der seperabel und vollständig metrisierbar ist, wird polnisch genannt.*

Lemma 37.11. *Ein polnischer Raum ist stets homöomorph zu einer G_δ -Teilmenge des Hilbertwürfels $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

Beweis. XXXX □

37.4 Baire-Räume

Definition 37.12 (nirgend dicht). *Für einen topologischen Raum X wird eine Teilmenge $\Omega \subseteq X$, für die $\overline{\Omega}^\circ = \emptyset$, nirgend dicht genannt.*

Für eine nirgend dichte Menge gilt $\partial\overline{\Omega} = \overline{\Omega}$.

Definition 37.13 (Mager Menge). *Für einen metrischen Raum wird eine Teilmenge, die als Vereinigung abzählbar vieler nirgend dichter Teilmengen dargestellt werden kann, mager genannt.*

Magere Mengen werden auch *Mengen erster Kategorie* genannt, nicht magere auch *Mengen zweiter Kategorie*. Komplemente magerer Mengen werden auch *komager* genannt.

Satz 37.14. *Für einen topologischen Raum sind äquivalent:*

- I.) *Das Komplement jeder mageren Teilmenge ist dicht.*
- II.) *Jede nichtleere offene Teilmenge ist nicht mager.*
- III.) *Jede Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen ohne innere Punkte hat wieder keine inneren Punkte.*
- IV.) *Jeder Schnitt von abzählbar vielen offenen dichten Teilmengen ist wieder dicht.*

Beweis. XXXX □

Definition 37.15 (Baire-Raum). *Ein topologischer Raum, für welchen die äquivalenten Bedingungen aus Satz (37.14) erfüllt sind, wird Baire-Raum genannt.*

Lemma 37.16. *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind Baire-Räume.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 38

Folgen in topologischen Räumen

Definition 38.1 (Konvergenz in topologischen Räumen). *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X , für die es einen Punkt $x \in X$ gibt, sodass:*

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists n \in \mathbb{N} \forall N > n: x_N \in U \quad (38.1)$$

ist konvergent gegen x , notiert als $x_n \rightarrow x$.

Satz 38.2. *Der Konvergenzpunkt einer Folge in einem Hausdorffraum ist eindeutig.*

Für einen Hausdorffraum X und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow x'$ gilt also $x = x'$.

Beweis. Sei $x \neq x'$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ sowie $U' \in \mathcal{U}(x')$ disjunkte Umgebungen. Seien $N, N' \in \mathbb{N}$ derart, dass $\forall n \in \mathbb{N}, n > N: x_n \in U$ und $\forall n' \in \mathbb{N}, n' > N': x_{n'} \in U'$. XXXX \square

Lemma 38.3. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ mit $y_n \rightarrow y \in Y$ und eine offene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y) \quad (38.2)$$

Beweis. Sei $U \in \mathcal{U}(f^{-1}(y))$ beliebig, dann gibt es eine offene Teilmenge $f^{-1}(y) \in V \subseteq U$, wobei $f(V)$ offen ist, da f offen ist. Damit ist $y \in f(V) \subseteq f(U) \in \mathcal{U}(y)$ und $\exists n \in \mathbb{N} \forall N > n: y_N \in f(U) \Rightarrow f^{-1}(y_N) \in U$. \square

Lemma 38.4. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad (38.3)$$

Beweis. Sei $U \in \mathcal{U}(f(x))$ beliebig, dann gibt es eine offene Menge $f(x) \in V \subset U$, wobei $f^{-1}(V)$ offen ist, da f stetig ist. Damit ist $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ und $\exists n \in \mathbb{N} \forall N > n: x_N \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x_N) \in U$. \square

Definition 38.5 (Folgenkompaktheit). *Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X , für die jede Folge eine konvergente Teilfolge in A besitzt, wird folgenkompakt genannt.*

Analog zur relativen Kompaktheit nach Definition (49.1) sei:

Definition 38.6 (Relative Folgenkompaktheit). *Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X , für die jede Folge eine konvergente Teilfolge in \overline{A} besitzt, wird relativ folgenkompakt genannt.*

Lemma 38.7. *Ein kompakter topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist folgenkompakt.*

Beweis. XXXX

□

Lemma 38.8. *Ein metrisierbarer topologischer Raum ist genau dann kompakt wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 39

Filter in topologischen Räumen

Definition 39.1 (Filter). XXXX

Definition 39.2 (Ultrafilter). XXXX

Definition 39.3 (Filterkonvergenz). Ein Filter \mathcal{F} in einem topologischen Raum X , für die es einen Punkt $x \in X$ gibt mit:

$$\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F} \tag{39.1}$$

ist konvergent gegen x , geschrieben als $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Definition 39.4 (Berührungspunkt). Für einen topologischen Raum X und einen Filter \mathbb{F} auf X wird ein Punkt $x \in X$, für den:

$$\forall_{F \in \mathbb{F}} \forall_{U \in \mathcal{U}(x)} : F \cap U = \emptyset \tag{39.2}$$

Berührungspunkt des Filters genannt.

Lemma 39.5. Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subset X$ ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn es einen gegen x konvergierenden und A enthaltenden Filter auf X gibt.

Beweis. XXXX □

Lemma 39.6. Für topologische Räume X und Y ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $\forall x \in X$ und für alle Filter \mathcal{F} auf X , die gegen x konvergieren jeweils der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ in Y gegen $f(x) \in Y$ konvergiert.

Beweis. XXXX □

Lemma 39.7. Ein topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn jeder Filter gegen genau einen Punkt konvergiert.

Beweis. XXXX □

Lemma 39.8. Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter konvergiert.

Beweis. XXXX □

Kapitel 40

Netze in topologischen Räumen

Definition 40.1 (Netz). XXXX

Definition 40.2 (Netzkonvergenz). Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Raum X , für das es einen Punkt $x \in X$ gibt mit:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in I \forall i \in I, i_0 < i : x_i \in U \quad (40.1)$$

ist konvergent gegen x , geschrieben als $(x_i)_{i \in I} \rightarrow x$ oder $\lim_{i \in I} x_i = x$.

Definition 40.3 (Häufungspunkt). Für ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Raum X , ist ein Punkt $y \in X$, für den:

$$\forall U \in \mathcal{U}(y) \forall i_0 \in I \exists i \in I, i_0 < i : x_i \in U \quad (40.2)$$

ein Häufungspunkt.

Lemma 40.4. Ein Punkt eines topologischen Raumes ist genau dann ein Häufungspunkt eines Netzes, wenn dieser ein gegen ihn konvergentes Teilnetz enthält.

Beweis. XXXX

□

Kapitel 41

Homöomorphismen

Definition 41.1 (Homöomorphismus). Für topologische Räume X und Y wird eine stetige bijektive Abbildung $\phi: X \rightarrow Y$, deren Umkehrabbildung ϕ^{-1} ebenfalls stetig ist¹, Homöomorphismus genannt.

Es folgt direkt, dass, wenn ϕ ein Homöomorphismus ist, ϕ^{-1} ebenfalls einer ist.

Korollar 41.2. Homöomorphismen sind offen.

Die Menge aller Homöomorphismen zwischen zwei topologischen Räumen X und Y wird als $\text{Homeo}(X, Y)$ bezeichnet. Die Menge aller Homöomorphismen auf einem topologischen Raum X wird als:

$$\text{Homeo}(X) := \text{Homeo}(X, X) \quad (41.1)$$

bezeichnet. Mit der Komposition \circ als Verknüpfung sowie der Identitätsabbildung id_X als neutralem Element wird diese zur *Homöomorphismengruppe* $(\text{Homeo}(X), \circ, \text{id}_X)$.

Lemma 41.3. Die Komposition von Homöomorphismen ist ein Homöomorphismen.

Beweis. Die Komposition von bijektiven Abbildungen ist bijektiv nach Lemma () im Skript *Mengenlehre* und die Komposition von glatten Abbildungen ist glatt nach Lemma (27.3). \square

Satz 41.4. Jede stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist abgeschlossen und eigentlich. Ist die Abbildung zusätzlich bijektiv, ist sie sogar ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f: X \rightarrow Y$ stetig. I.) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach Lemma (47.2) ist A kompakt, nach Lemma (47.3) ist $f(A)$ kompakt und nach Lemma (72.11) ist $f(A)$ abgeschlossen. II.) Sei $K \subseteq Y$ kompakt. Nach Lemma (72.11) ist K abgeschlossen, nach Lemma (XXXX) ist $f^{-1}(K)$ abgeschlossen und nach Lemma (47.2)) ist $f^{-1}(K)$ kompakt. III.) Folgt mit Lemma (27.14). \square

Lemma 41.5. Jede bijektive und offene Abbildung von einem Hausdorff-Raum in einen kompakten Raum ist stetig und kompakt.

Beweis. Sei X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f: X \rightarrow Y$ offen, womit f^{-1} stetig ist. Nach Satz (41.4) ist f^{-1} abgeschlossen und eigentlich, mit Lemma (XXXX) ist f stetig und kompakt. \square

¹alternativ eine offene bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls offen ist

Ein surjektiver lokaler Homöomorphismus wird auch *lokal topologische Abbildung* genannt. Offenbar ist jeder Homöomorphismus insbesondere ein lokaler Homöomorphismus.

Lemma 41.6. *Homöomorphismen sind eigentlich.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume, $K \subset Y$ kompakt und $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Für eine beliebige Überdeckung $(U_i)_{i \in I} \subset X$ von $f^{-1}(K)$ ist $(f(U_i))_{i \in I} \subset Y$ eine Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $(f(U_i))_{i \in I' \subset I} \subset Y$, womit $(U_i)_{i \in I'} \subset X$ eine endliche Teilüberdeckung von $f^{-1}(K)$ ist, womit $f^{-1}(K)$ kompakt ist, womit f eigentlich ist. \square

Da ein Homöomorphismus stetig und offen ist, folgt aus den Lemmata (30.12) und (30.13):

Korollar 41.7. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Teilmenge $\Omega \subset X$ und einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f(\Omega^\circ) = f(\Omega)^\circ \quad (41.2)$$

$$f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)} \quad (41.3)$$

Mit Lemma (??) im Skript *Mengenlehre* ist:

Korollar 41.8. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Teilmenge $\Omega \subset X$ und einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f(\partial\Omega) = f(\overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ) \supseteq f(\overline{\Omega}) \setminus f(\Omega^\circ) = \overline{f(\Omega)} \setminus f(\Omega)^\circ = \partial f(\Omega) \quad (41.4)$$

Da ein Homöomorphismus stetig und offen ist, folgt aus den Lemmata (30.15) und (30.16):

Korollar 41.9. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Teilmenge $\Omega \subset Y$ und einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f^{-1}(\Omega^\circ) = f^{-1}(\Omega)^\circ \quad (41.5)$$

$$f^{-1}(\overline{\Omega}) = \overline{f^{-1}(\Omega)} \quad (41.6)$$

Mit Lemma (??) im Skript *Mengenlehre* ist:

Korollar 41.10. *Für topologische Räume X und Y sowie eine Teilmenge $\Omega \subset X$ und einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f^{-1}(\partial\Omega) = f^{-1}(\overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ) = f^{-1}(\overline{\Omega}) \setminus f^{-1}(\Omega^\circ) = \overline{f^{-1}(\Omega)} \setminus f^{-1}(\Omega)^\circ = \partial f^{-1}(\Omega) \quad (41.7)$$

Für einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$\partial f := f^{-1}|_{\partial Y} : \partial Y \rightarrow \partial X \quad (41.8)$$

ebenfalls ein Homöomorphismus, für den offenbar:

$$\partial \text{id}_X = \text{id}_{\partial X} \quad (41.9)$$

Für Homöomorphismen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ ist zudem:

$$\partial(g \circ f) = (g \circ f)^{-1}|_{\partial Z} = (f^{-1} \circ g^{-1})|_{\partial Z} = f^{-1}|_{\partial Y} \circ g^{-1}|_{\partial Z} = \partial f \circ \partial g \quad (41.10)$$

Lemma 41.11.

$$\partial: \text{core Top2} \rightarrow \text{core Top2}, (X, A) \mapsto (X, \partial A), (f: (X, A) \rightarrow (Y, B)) \mapsto (\partial f = f^{-1}|_{\partial B}: (Y, \partial B) \rightarrow (X, \partial A)) \quad (41.11)$$

Korollar 41.12. *Alle offenen Intervalle des \mathbb{R} sind zueinander homöomorph.*

Korollar 41.13. *Alle abgeschlossenen Intervalle des \mathbb{R} sind zueinander homöomorph.*

41.1 Lokale Homöomorphismen

Definition 41.14 (Lokaler Homöomorphismus). *Für topologische Räume X, Y wird eine stetige Abbildung $\phi: X \rightarrow Y$, für die $\forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}(x)$, sodass $\phi(U) \in \mathcal{U}(\phi(x))$ und $\phi|_U$ ein Homöomorphismus ist, lokaler Homöomorphismus genannt.*

Lemma 41.15. *Eine surjektive Abbildung ist genau dann ein lokaler Homöomorphismus und eigentlich, wenn sie eine Überlagerung mit endlicher Faser ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 42

Kompakt-Offen-Topologie (KO-Topologie)

Für topologische Räume X und Y kann der Raum $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ mit einer Topologie ausgestattet werden. Es gibt dafür mehrere Möglichkeiten, jedoch hat sich darunter eine als besonders nützlich etabliert:

Definition 42.1 (Kompakt-Offen-Topologie). *Für topologische Räume X und Y ist die vom Mengensystem:*

$$\{f \in C(X, Y) \mid f[K] \subset U\}, K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ offen} \quad (42.1)$$

auf $C(X, Y)$ erzeugte Topologie die Kompakt-Offen-Topologie.

$C(X, Y)$ wird mit der Kompakt-Offen-Topologie auch als $C_{\text{co}}(X, Y)$ bezeichnet.

Lemma 42.2. *Für lokalkompakte topologische Räume X und Y sowie einen topologischen Raum Z ist die Komposition:*

$$\circ: C_{\text{co}}(X, Y) \times C_{\text{co}}(Y, Z) \rightarrow C_{\text{co}}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f \quad (42.2)$$

stetig.

Beweis. XXXX □

Lemma 42.3. *Für einen lokalkompakte topologischen Räume X und einen topologischen Raum Y ist die Evaluation:*

$$\text{ev}: C_{\text{co}}(X, Y) \times X \rightarrow Y, (f, x) \mapsto f(x) \quad (42.3)$$

stetig.

Beweis. XXXX □

Kapitel 43

Topologie der Sphären

Definition 43.1 (n -dimensionale Einheitskugel). *Der mit der Teilraumtopologie der kanonischen Topologie des \mathbb{R}^n ausgestattete Raum:*

$$\mathcal{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n \quad (43.1)$$

ist die n -dimensionale Einheitskugel.

Lemma 43.2. \mathcal{D}^n und $[0; 1]^n$ sind homöomorph.

Beweis. Es ist $\mathcal{D}^1 = [-1; 1] \approx [0; 1]$ nach Korollar (41.13). Angenommen $\mathcal{D}^n \approx [0; 1]^n$, dann ist $\mathcal{D}^n \times [0; 1] \approx [0; 1]^{n+1}$. \square

Da $[0; 1]^m \times [0; 1]^n = [0; 1]^{m+n}$, folgt:

Korollar 43.3. $\mathcal{D}^m \times \mathcal{D}^n$ und \mathcal{D}^{m+n} sind homöomorph.

Definition 43.4 (n -Sphäre). *Der mit der Teilraumtopologie der kanonischen Topologie des \mathbb{R}^n ausgestattete Raum:*

$$\mathrm{Sp}^n := \partial\mathcal{D}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n \quad (43.2)$$

ist die n -Sphäre.

Nach Satz (30.24) ist:

$$\mathrm{Sp}^{m+n-1} = \partial\mathcal{D}^{m+n} \approx \partial(\mathcal{D}^m \times \mathcal{D}^n) = (\mathrm{Sp}^{m-1} \times \mathcal{D}^n) \cup (\mathcal{D}^m \times \mathrm{Sp}^{n-1}) \quad (43.3)$$

$$\mathrm{Sp}^m \times \mathrm{Sp}^n = \partial(\mathcal{D}^{m+1} \times \mathcal{D}^{n+1}) = \partial(\mathrm{Sp}^m \times \mathcal{D}^{n+1}) \quad (43.4)$$

Seien M eine $p+q$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\phi: \mathrm{Sp}^p \times \mathcal{D}^q \rightarrow M$ eine Einbettung, dann ist:

$$M' = (M - \mathrm{img} \phi) \sqcup_{\mathrm{Sp}^p \times \mathrm{Sp}^{q-1}} (\mathcal{D}^{p+1} \times \mathrm{Sp}^{q-1}) \quad (43.5)$$

43.1 Satz von Borsuk–Ulam

Satz 43.5 (Satz von Borsuk–Ulam). *Für jede stetige Funktion $f: \mathrm{Sp}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $x \in \mathrm{Sp}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Der Satz wurde von Stanislaw Ulam vermutet und von Karol Borsuk im Jahr 1933 bewiesen.

Beweis. XXXX \square

43.2 Satz von Poincaré–Bohl

XXXX

43.3 Satz von Poincaré–Brouwer

Satz 43.6 (Satz von Poincaré–Brouwer). *Für jede stetige Funktion $f: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Punkt $x \in S^{2n}$ mit $f(x) = \lambda x$.*

Der Satz wurde von John Milnor im Jahr 1978 bewiesen. Meist wird auch eine speziellere Formulierung des Satzes angegeben. Bei der Betrachtung eines tangentialen Vektorfeldes sind x und $f(x)$ stets linear unabhängig, womit $\lambda = 0$ bzw. $f(x) = 0$ für einen Punkt x

Auf dem S^{2n} gibt es kein nirgends verschwindendes tangentialen Vektorfeld.

Speziell für den S^2 wird der Satz von Poincaré–Brouwer daher auch als *Satz vom gekämmten Igel*, da es nicht möglich ist einen eingerollten Igel zu kämmen ohne, dass sich ein Glatzenpunkt ergibt, oder als *Satz vom globalen Wind*, da es auf der Erde immer eine windstille Stelle geben muss, bezeichnet.

Beweis. XXXX □

43.4 Fixpunktsatz von Brouwer

Lemma 43.7. *Es gibt keine stetige Retraktion $D^{n+1} \rightarrow S^n$ für $n \geq 0$.*

Beweis. (Mit Homotopie.) Gäbe es eine solche Retraktion, dann ergäbe sich durch Anwendung der n -ten Homotopie π_n auf die Sequenz $\text{id}_{S^n}: S^n \hookrightarrow D^{n+1} \rightarrow S^n$ mit $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ nach XXXX und $\pi_n(D^{n+1}) \cong 1$ nach XXXX sowie mit $\pi_n \text{id}_{S^n} = \text{id}_{\pi_n(S^n)} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ sowie den Funktoreigenschaften von π_n nach XXXX eine Sequenz:

$$\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (43.6)$$

die jedoch nicht existieren kann. □

Beweis. (Mit Homologie.) Gäbe es eine solche Retraktion, dann ergäbe sich durch Anwendung der n -ten Homologie H_n auf die Sequenz $\text{id}_{S^n}: S^n \hookrightarrow D^{n+1} \rightarrow S^n$ mit $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ nach XXXX und $H_n(D^{n+1}) \cong 1$ nach XXXX sowie mit $H_n \text{id}_{S^n} = \text{id}_{H_n(S^n)} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ sowie den Funktoreigenschaften von H_n nach XXXX eine Sequenz:

$$\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (43.7)$$

die jedoch nicht existieren kann. □

Satz 43.8 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. XXXX □

43.5 Satz von Kakutani–Yamabe–Yujobô

Satz 43.9 (Satz von Kakutani–Yamabe–Yujobô). *Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es n paarweise orthonormale Vektoren mit gleichem Funktionswert.*

Beweis. XXXX

□

43.6 Satz von Dyson–Yang

Satz 43.10 (Satz von Dyson–Yang). *Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existieren n paarweise Diameter, deren $2n$ Endpunkte alle den gleichen Funktionswert haben.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 44

Topologie der Tori

Definition 44.1 (n -Torus). *Der mit der Produkttopologie ausgestattete Raum:*

$$\mathbb{T}^n := (\mathbb{S}^1)^n \subset \mathbb{R}^{2n} \quad (44.1)$$

ist der n -Torus.

Da die 1-Sphäre kompakt ist, ist der n -Torus nach dem Satz von Tychonoff (47.15) kompakt. Da die 1-Sphäre randlos ist, ist der n -Torus nach Satz (30.24) randlos. Das ist eine notwendige Bedingung, dass der n -Torus als Rand eines topologischen Raumes dargestellt werden kann. Nach Satz (30.24) ist es der Rand des topologischen Raumes $\mathcal{D}^2 \times \mathbb{T}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, da mit Satz (30.24):

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^{n-1} = \left(\partial \mathcal{D}^2 \times \overline{\mathbb{T}^{n-1}} \right) \cup \left(\overline{\mathcal{D}^2} \times \underbrace{\partial \mathbb{T}^{n-1}}_{=\emptyset} \right) = \partial(\mathcal{D}^2 \times \mathbb{T}^{n-1}). \quad (44.2)$$

Mit gleicher Begründung ist sogar allgemeiner jedes Produkt einer Sphäre mit einem Torus der Rand eines topologischen Raumes:

$$\mathbb{S}^m \times \mathbb{T}^n = \left(\partial \mathcal{D}^{m+1} \times \overline{\mathbb{T}^n} \right) \cup \left(\overline{\mathcal{D}^{m+1}} \times \underbrace{\partial \mathbb{T}^{n-1}}_{=\emptyset} \right) = \partial(\mathcal{D}^{m+1} \times \mathbb{T}^n). \quad (44.3)$$

Kapitel 45

Topologische Gruppen

Definition 45.1 (Topologische Gruppe). *Eine Gruppe G mit einer Topologie, sodass die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ mit der Produkttopologie und die Inversionsabbildung $G \rightarrow G$ stetig sind, ist eine topologische Gruppe.*

Die Inversionsabbildung ist eine Involution und daher ein Homöomorphismus. Nach Definition (29.1) der Produkttopologie sind für ein $g \in G$ die Links- und Rechtsgruppenwirkung $\triangleleft_g: G \rightarrow G, h \mapsto g \circ h$ und $\triangleright_g: G \rightarrow G, h \mapsto h \circ g$ stetig und da stetige Umkehrabbildungen $\triangleleft_{g^{-1}}$ und $\triangleright_{g^{-1}}$ existieren, sogar Homöomorphismen.

Für eine offene Menge $U \subseteq G$ und $V \subseteq G$ beliebig sind:

$$UV = \{uv | u \in U, v \in V\} = \bigcup_{v \in V} \{\triangleright_v(u) | u \in U\} = \bigcup_{v \in V} \triangleright_v(U) \quad (45.1)$$

$$VU = \{vu | u \in U, v \in V\} = \bigcup_{v \in V} \{\triangleleft_v(u) | u \in U\} = \bigcup_{v \in V} \triangleleft_v(U) \quad (45.2)$$

als Vereinigung offener Teilmengen offen.

Lemma 45.2. *Für eine topologische Gruppe G ist die Zusammenhangskomponente G_0 des neutralen Elementes ein abgeschlossener Normalteiler.*

Beweis. □

Lemma 45.3. *Für eine topologische Gruppe G , $A \subseteq G$ abgeschlossen und $x \in G$ existiert eine offene Umgebung $1 \in U \subseteq G$ mit $U^{-1} = U$ und $xU \cap AU = Ux \cap UA = \emptyset$.*

Beweis. □

Aus diesem Lemma folgt insbesondere:

Korollar 45.4. *Topologische Gruppen sind regulär (T_3 -Raum).*

Lemma 45.5. *Für eine topologische Gruppe G sind äquivalent:*

- I.) G ist ein T_1 -Raum.
- II.) G ist ein Hausdorff-Raum (T_2 -Raum).
- III.) $\{1\} \subseteq G$ ist abgeschlossen.

Beweis. I.) \Rightarrow III.): Folgt aus Lemma (71.3). III.) \Rightarrow II.): Mit der Abbildung $f: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ gilt $\Delta_G = f^{-1}(\{1\})$. Ist $\{1\}$ abgeschlossen, folgt mit Lemma (27.4) daraus, dass $\Delta_G = f^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen ist und mit dem Diagonalkriterium nach Lemma (72.4) folgt, dass G hausdorffsch ist. \square

Lemma 45.6. *Für eine topologische Gruppe G und eine Untergruppe $H < G$ gilt:*

I.) G/H ist regulär (T_3 -Trennungsaxiom).

II.) $G \rightarrow G/H$ ist surjektiv, stetig und offen.

III.) H ist genau dann abgeschlossen, wenn G/H ein Hausdorff-Raum ist.

Beweis. XXXX \square

Lemma 45.7. *Für einen kompakten Hausdorff-Raum X ist $\text{Homeo}(X)$ mit der Kompakt-Offen-Topologie eine topologische Gruppe. [8, Korollar 3.5.3]*

Beweis. XXXX \square

45.1 Zusammen- und Wegzusammenhangskomponenten topologischer Gruppen

Lemma 45.8. *Sei X eine topologische Gruppe, dann gilt:*

I.) Für $x \sim_c x'$ und $y \sim_c y'$ ist $x \cdot y \sim_c x' \cdot y'$.

II.) Für $x \sim_{pc} x'$ und $y \sim_{pc} y'$ ist $x \cdot y \sim_{pc} x' \cdot y'$.

Beweis. I.): XXXX.

II.): Da $x \sim_{pc} x'$ gibt es einen (stetigen) Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$. Da $y \sim_{pc} y'$ gibt es einen (stetigen) Weg $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\delta(0) = y$ und $\delta(1) = y'$. Nun ist $\gamma \cdot \delta: [0, 1] \rightarrow X$ nach (XXXX: (gamma,delta) stetig) und Lemma (27.3) stetig, da die Verknüpfung von X stetig ist, mit $(\gamma \cdot \delta)(0) = \gamma(0) \cdot \delta(0) = x \cdot y$ und $(\gamma \cdot \delta)(1) = \gamma(1) \cdot \delta(1) = x' \cdot y'$, womit $x \cdot y \sim_{pc} x' \cdot y'$. \square

Gemäß dieses Lemmas sind die Abbildungen:

$$X / \sim_c \times X / \sim_c \rightarrow X / \sim_c, ([x]_c, [y]_c) \mapsto [xy]_c \quad (45.3)$$

$$X / \sim_{pc} \times X / \sim_{pc} \rightarrow X / \sim_{pc}, ([x]_{pc}, [y]_{pc}) \mapsto [xy]_{pc} \quad (45.4)$$

wohldefiniert, welche eine Gruppenstruktur auf X / \sim_c bzw. X / \sim_{pc} definieren. Die Assoziativität folgt dabei direkt aus der Assoziativität der Gruppenstruktur auf X . Die neutralen Elemente sind $[1]_c$ bzw. $[1]_{pc}$ und für ein Element $x \in X$ sind die inversen Elemente von $[x]_c$ bzw. $[x]_{pc}$ jeweils $[x^{-1}]_c$ bzw. $[x^{-1}]_{pc}$.

Aus der Einschränkung der Links- und Rechtsgruppenwirkung auf eine Zusammenhangskomponente ergeben sich Abbildungen $\triangleleft_x: [y]_c \rightarrow x[y]_c, y' \mapsto xy'$ und $\triangleright_x: [y]_c \rightarrow [y]_c x, y' \mapsto y'x$

45.2 Homeo als Funktor

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\text{Homeo id}_X = \text{id}_{\text{Homeo}(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\text{Homeo}(g \circ f) = \text{Homeo}(g) \circ \text{Homeo}(f)$.

Korollar 45.9. *Die Homöomorphismengruppe ist ein kovarianter Funktor:*

$$\text{Homeo}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}, X \mapsto \text{Homeo}(X), f \mapsto \text{Homeo}(f). \quad (45.5)$$

Für kompakte Hausdorff-Räume (Objekte in **CHaus**) sind die Homöomorphismengruppen nach Lemma (45.7) insbesondere topologische Gruppen (Objekte in **TopGrp**). Da die Vor- und Nachkomposition von Abbildungen in der KO-Topologie nach Lemma (42.2) stetig sind, sind die induzierten Homöomorphismenabbildungen ebenfalls stetig, weshalb:

Korollar 45.10. *Die Homöomorphismengruppe schränkt sich ein zu einem kovarianten Funktor:*

$$\text{Homeo}: \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{TopGrp}, X \mapsto \text{Homeo}(X), f \mapsto \text{Homeo}(f). \quad (45.6)$$

Teil VI
Kompaktheit

Kapitel 46

Überdeckungen

Ein topologischer Raum besteht aus offenen Mengen, wobei die Einschränkung von topologischen Eigenschaften auf diese durch die Teilraumtopologie betrachtet werden kann sowie umgekehrt die Erweiterung von topologischen Eigenschaften auf den gesamten Raum. Das ist gleichbedeutend damit, einen einzigen Raum durch mehrere kleinere Teile zu untersuchen.

Definition 46.1 (Überdeckung). Für einen topologischen Raum X ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen, für die:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad (46.1)$$

eine Überdeckung von X .

Beispiel 46.2. Die Aufteilung der Erde in eine Nord- und Südhalbkugel entspricht der Überdeckung der Sphäre S^2 durch zwei Scheiben D^2 .

Definition 46.3 (Punktendliche Überdeckung). Wenn jeder Punkt in nur endlich vielen U_i enthalten ist, wird $(U_i)_{i \in I}$ punktendlich genannt.

Definition 46.4 (Lokalendliche Überdeckung). Wenn für jeden Punkt eine Umgebung existiert, die nur endlich viele U_i schneidet, wird $(U_i)_{i \in I}$ lokalendlich genannt.

Korollar 46.5. Jede lokalendliche Überdeckung ist punktendlich.

Definition 46.6 (Verfeinerung). Eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, für die:

$$\forall_{j \in J} \exists_{i \in I} : V_j \subseteq U_i \quad (46.2)$$

wird eine Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$ genannt.

Definition 46.7 (Quasischrumpfung). Eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, für die:

$$\forall_{j \in J} \exists_{i \in I} : \bar{V}_j \subseteq U_i \quad (46.3)$$

wird eine Quasischrumpfung von $(U_i)_{i \in I}$ genannt.

Korollar 46.8. Jede Quasischrumpfung ist eine Verfeinerung.

Definition 46.9 (Schrumpfung). *Eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$, für die:*

$$\bigvee_{i \in I} \overline{V_i} \subseteq U_i \quad (46.4)$$

wird eine Schrumpfung von $(U_i)_{i \in I}$ genannt.

Korollar 46.10. *Jede Schrumpfung ist eine Quasischrumpfung.*

Korollar 46.11. *Eine Teilüberdeckung einer Teilüberdeckung ist eine Teilüberdeckung.*

Korollar 46.12. *Eine lokalendliche Verfeinerung einer Teilüberdeckung ist eine lokalendliche Verfeinerung.*

Korollar 46.13. *Eine punktendliche Verfeinerung einer Teilüberdeckung ist eine punktendliche Verfeinerung.*

Lemma 46.14. *Ein Lindelöf-Raum, der:*

- I.) abzählbar kompakt ist, ist kompakt.*
- II.) abzählbar parakompakt ist, ist parakompakt.*
- III.) abzählbar metakompakt ist, ist metakompakt.*
- IV.) abzählbar orthokompakt ist, ist orthokompakt.*

Beweis. Für jede offene Überdeckung des Raumes existiert eine abzählbare Teilüberdeckung, da der Raum lindelöfisch ist.

I.): Für diese abzählbare Überdeckung existiert eine endliche Teilüberdeckung, da der Raum abzählbar kompakt ist, die nach Korollar (46.11) auch eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung ist.

II.): Für diese abzählbare Überdeckung existiert eine lokalendliche Verfeinerung, da der Raum abzählbar parakompakt ist, die nach Korollar (46.12) auch eine lokalendliche Verfeinerung der ursprünglichen Überdeckung ist.

III.): Für diese abzählbare Überdeckung existiert eine Punktendliche Verfeinerung, da der Raum abzählbar metakompakt ist, die nach Korollar (46.13) auch eine punktendliche Verfeinerung der ursprünglichen Überdeckung ist.

IV.): XXXX □

Kapitel 47

Kompaktheit und Folgenkompaktheit

In topologischen Räumen sind die beiden für metrische Räume äquivalenten Definitionen von Kompaktheit, die Existenz konvergenter Teilfolgen für jede Folge nach Definition (13.1) und die Existenz endlicher Teilüberdeckungen für jede Überdeckung nach dem Satz von Heine–Borel (13.6) nicht mehr äquivalent und müssen daher für topologische Räume getrennt werden.

47.1 Kompaktheit

Definition 47.1 (Kompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den jede (abzählbare) offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält, wird (abzählbar) kompakt genannt.*

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) wird die Menge seiner kompakten Teilmengen als \mathcal{O}_X^c bezeichnet.

Satz 47.2. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist wieder ein Kompaktum.*

Beweis. Seien K ein kompakter topologischer Raum und $A \subset K$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , dann ist $(U_i)_{i \in I} \cup A^c$ eine offene Überdeckung von K , wobei A^c offen ist, da A abgeschlossen ist. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $(U_j)_{j \in J} \cup A^c$ bereits eine offene Überdeckung von K ist, womit $(U_j)_{j \in J}$ bereits eine offene Überdeckung von A ist. \square

Satz 47.3. *Eine stetige Abbildung bildet Kompakta auf Kompakta ab.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, dann ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , da f stetig ist. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ bereits eine offene Überdeckung von K ist, womit $(U_j)_{j \in J}$ bereits eine offene Überdeckung von $f(K)$ ist. \square

Lemma 47.4. *Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen sind kompakt.*

Beweis. Seien X ein topologischer Raum und $(K_i)_{i \in I} \subset X$ eine endliche Familie an kompakten Teilmengen. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $\bigcup_{i \in I} K_i$, dann ist diese insbesondere eine offene Überdeckung von K_i für jedes $i \in I$. Daher existiert jeweils eine endliche Teilüberdeckung $(U_l)_{l \in L_i}$ von K_i mit $L_i \subset J$ endlich für jedes $i \in I$. Daher ist $(U_l)_{l \in \bigcup_{i \in I} L_i}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\bigcup_{i \in I} K_i$ mit $\bigcup_{i \in I} L_i \subset J$ endlich, da I endlich und L_i endlich für jedes $i \in I$. \square

Lemma 47.5. *Abzählbare Schnitte von kompakten Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind kompakt.*

Beweis. Seien X ein Hausdorff-Raum und $(K_i)_{i \in I} \subset X$ eine abzählbare Familie an kompakten Teilmengen. Nach XXXX sind diese alle abgeschlossen, nach Bemerkung (XXXX) ist ihr Schnitt $\bigcap_{i \in I} K_i$ abgeschlossen und als Teilmenge einer kompakten Teilmenge (eines K_i für beliebiges $i \in I$) nach Satz (47.2) kompakt. \square

Die Hausdorff-Eigenschaft ist dabei zwingend notwendig:

Beispiel 47.6. XXXX

47.2 Folgenkompaktheit

Definition 47.7 (Folgenkompaktheit). *Ein topologischer Raum, in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge enthält, wird folgenkompakt genannt.*

Im Gegensatz zur Theorie metrischer Räume sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit in der Theorie topologischer Räume unabhängig voneinander. Ein kompakter topologischer Raum muss nicht folgenkompakt sein, ebenso muss ein folgenkompakter topologischer Raum nicht kompakt sein!

Beispiel 47.8. *Die lange Gerade ist folgenkompakt, aber nicht kompakt. [1, Bsp. 45, S. 172]*

Beispiel 47.9. $[0, 1]^{[0,1]}$ *ist kompakt, aber nicht folgenkompakt. [1, Bsp. 105, S. 176]*

Lemma 47.10. *Eine abgeschlossene Teilmenge einer folgenkompakten Menge ist folgenkompakt.*

Beweis. Seien X ein folgenkompakter topologischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine Folge. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ existiert eine konvergente Folge mit Grenzwert in $\overline{A} = A$ nach Lemma (XXXX). \square

Lemma 47.11. *Eine stetige Abbildung bildet folgenkompakte Mengen auf folgenkompakte Mengen ab.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume, $\Omega \subset X$ folgenkompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\Omega)$ eine Folge, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: y_n = f(x_n)$. Da Ω folgenkompakt ist, enthält $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Da f stetig ist, enthält $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. \square

Lemma 47.12. *Endliche Vereinigungen von folgenkompakten Teilmengen sind folgenkompakt.*

Beweis. Seien X ein topologischer Raum und $(K_i)_{i \in I} \subset X$ eine endliche Familie an folgenkompakten Teilmengen. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcup_{i \in I} K_i$, dann gibt es ein $i \in I$, sodass unendlich viele Folgenglieder $K_i \subset X$ liegen, also eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I} \subset K_i$ für $I \subseteq \mathbb{N}$, da I endlich ist. Da dieses K_i folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_n)_{n \in J} \subseteq K_i$ für $J \subseteq I$, welche ebenfalls eine konvergente Teilfolge in $\bigcup_{i \in I} K_i$ ist. \square

Lemma 47.13. *Endliche Schnitte von folgenkompakten Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind folgenkompakt.*

Beweis. Seien X ein Hausdorff-Raum und $(K_i)_{i \in I} \subset X$ eine endliche Familie an folgenkompakten Teilmengen. XXXX \square

Die Hausdorff-Eigenschaft ist dabei zwingend notwendig:

Beispiel 47.14. XXXX

47.3 Satz von Tychonoff

Satz 47.15 (Satz von Tychonoff). *In einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ topologischer Räume ist genau dann jeder topologische Raum kompakt, wenn ihr Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt ist.*

Beweis. XXXX \square

Definition 47.16 (Hilbertwürfel). *Sei $[0, 1]$ mit der vom Betrag induzierten Topologie ausgestattet, dann wird der topologische Raum $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie Hilbertwürfel genannt.*

Nach dem Satz von Tychonoff (47.15) ist der Hilbertwürfel kompakt.

Kapitel 48

Kompakte und eigentliche Abbildungen

Bei stetigen, offenen und abgeschlossenen Abbildungen werden die Bilder und Urbilder von offenen und abgeschlossenen Abbildungen betrachtet. Neben diesen Teilmengen sind in der Topologie aber auch kompakte Teilmengen von besonderem Interesse. Das führt auf zwei neue Arten von Abbildungen.

48.1 Kompakte Abbildungen

Definition 48.1 (Kompakte Abbildung). *Für topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) wird eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, für die Bilder kompakter Mengen kompakt sind:*

$$\forall_{K \in \mathcal{O}_X^c} : \phi(K) \in \mathcal{O}_Y^c \quad (48.1)$$

kompakt genannt.

Beispiel 48.2. *Die Identität ist kompakt.*

Lemma 48.3. *Die Komposition kompakter Abbildungen ist kompakt.*

Beweis. Seien $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Sei $K \subseteq X$ kompakt, dann ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt (da f kompakt ist) und $(g \circ f)(K) = g(f(K)) \subseteq Z$ kompakt (da g kompakt ist), womit $g \circ f$ kompakt ist. \square

Aus Satz (47.3) folgt direkt:

Korollar 48.4. *Stetige Abbildungen sind kompakt.*

48.2 Eigentliche Abbildungen

Definition 48.5 (Eigentliche Abbildung). *Für topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) wird eine Abbildung $\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, für die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind:*

$$\forall_{K \in \mathcal{O}_Y^c} : \phi^{-1}(K) \in \mathcal{O}_X^c \quad (48.2)$$

eigentlich genannt.

Beispiel 48.6. *Die Identität ist eigentlich.*

Lemma 48.7. *Die Komposition eigentlicher Abbildungen ist eigentlich.*

Beweis. Seien $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ eigentliche Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Sei $K \subseteq Z$ kompakt, dann ist $g^{-1}(K) \subseteq Y$ kompakt (da g eigentlich ist) und $(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K)) \subseteq X$ kompakt (da f eigentlich ist), womit $g \circ f$ eigentlich ist. \square

Das bedeutet, dass die topologischen Räume mit den eigentlichen Abbildungen eine Kategorie bilden.

Lemma 48.8. *Stetige und eigentliche Abbildungen in lokalkompakte Räume sind abgeschlossen.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume mit Y lokalkompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig und eigentlich. Sei $A \subset X$ abgeschlossen, dann XXXX. \square

Lemma 48.9. *Für eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ topologischer Räume gilt:*

- I.) *Ist $g \circ f$ eigentlich und f kompakt, dann ist $g|_{f(X)}$ eigentlich.*
- II.) *Ist $g \circ f$ eigentlich sowie g injektiv und kompakt, dann ist f eigentlich.*
- III.) *Ist $g \circ f$ kompakt und f eigentlich, dann ist $g|_{f(X)}$ kompakt.*
- IV.) *Ist $g \circ f$ kompakt sowie g injektiv und eigentlich, dann ist f kompakt.*

Als Spezialfall von I.) und III.) gilt: Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv und kompakt, dann ist g eigentlich. Ist $g \circ f$ kompakt und f surjektiv und eigentlich, dann ist g kompakt.

Beweis. Analog zu Lemma (27.15). I.): Sei $K \subseteq Z$ kompakt, dann ist $f^{-1}(g|_{f(X)}^{-1}(K)) = (g|_{f(X)} \circ f)^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt, womit $f(f^{-1}(g|_{f(X)}^{-1}(K))) = g|_{f(X)}^{-1}(K) \cap f(X) = |_{f(X)} \subseteq Y$ kompakt ist. II.): Sei $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist $g(K) \subseteq Z$ kompakt, womit $f^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(g(K))) = (g \circ f)^{-1}(g(K)) \subseteq Y$ kompakt ist. III.): Sei $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt, womit $(g|_{f(X)} \circ f)(f^{-1}(K)) = g|_{f(X)}(K \cap f(X)) = |_{f(X)}(K) \subseteq Z$ kompakt ist. IV.): Sei $K \subseteq X$ kompakt, dann ist $g(f(K)) = (g \circ f)(K) \subseteq Z$ kompakt, womit $g^{-1}(g(f(K))) = f(K) \subseteq Y$ kompakt ist. \square

Kapitel 49

Weitere Arten von Kompaktheit

49.1 Relative (Folgen)kompaktheit

Definition 49.1 (Relative Kompaktheit). *Für einen topologischen Raum X wird eine Teilmenge $A \subset X$, für die \overline{A} (folgen)kompakt ist, relativ (folgen)kompakt genannt, notiert als $A \subset\subset X$.*

Relative (Folgen)kompaktheit wird auch *Prä(folgen)kompaktheit* genannt.

Korollar 49.2. *(Folgen)kompakte Räume sind relativ (folgen)kompakt.*

Definition 49.3 (Relative Folgenkompaktheit). *Für einen topologischen Raum X wird eine Teilmenge $A \subset X$, für die jede Folge in A eine konvergente Teilfolge in \overline{A} enthält, relativ folgenkompakt genannt, notiert als $A \subset\subset X$.*

Korollar 49.4. *Folgenkompakte Räume sind relativ folgenkompakt.*

49.2 σ -Kompaktheit

Definition 49.5 (σ -Kompaktheit). *Ein topologischer Raum, der sich als abzählbare Vereinigung kompakter Teilräume darstellen lässt, wird σ -kompakt genannt.*

Korollar 49.6. *Kompakte Räume sind σ -kompakt.*

Beispiel 49.7. \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind mit der von der euklidischen Norm induzierten Topologie nicht kompakt, jedoch lokal- und σ -kompakt.

Kapitel 50

Metakompaktheit

Definition 50.1 (Metakompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den jede (abzählbare) offene Überdeckung eine punktendliche Verfeinerung besitzt, wird (abzählbar) metakompakt genannt.*

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) wird die Menge seiner metakompakten Teilmengen als $\mathcal{O}_X^{\text{mc}}$ bezeichnet.

Lemma 50.2. *Abgeschlossene Unterräume von metakompakten topologischen Räumen sind metakompakt.*

Vergleiche mit Satz (47.2) für eine analoge Aussage über kompakte Räume sowie mit den Lemmata (51.5) und (54.3) für analoge Aussagen über para- und lokalkompakte Räume.

Beweis. Seien X ein metakompakter topologischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , dann ist $(U_i)_{i \in I} \cup A^c$ eine offene Überdeckung von X . Da X metakompakt ist, existiert eine punktendliche Verfeinerung $(U_i)_{i \in I' \subseteq I} \cup A^c$, womit $(U_i)_{i \in I' \subseteq I}$ eine punktendliche Überdeckung von A ist. \square

Lemma 50.3. *Das Produkt eines kompakten mit einem metakompakten Raum ist metakompakt.*

Vergleiche mit Lemma (51.6) für eine analoge Aussage über parakompakte Räume.

Beweis. Seien X ein kompakter und Y ein metakompakter Raum. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. XXXX \square

50.1 Lokale Metakompaktheit

Metakompaktheit kann genau wie andere topologische Eigenschaften durch die Verwendung von Umgebungen und der Teilraumtopologie von einer globalen Eigenschaft des ganzen topologischen Raumes in eine lokale Eigenschaft über dessen Struktur um einzelne Punkte umgewandelt werden.

Definition 50.4 (lokal metakompakt). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung eines Punktes jeweils eine metakompakte Umgebung von diesem enthält (also eine Umgebungsbasis aus metakompakten Mengen von diesem existiert), wird lokal metakompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal metakompakt ist, wird lokal metakompakt genannt.*

Mit dieser Definition, die häufig für die Einschränkung einer globalen auf eine lokale Eigenschaft verwendet wird, folgt jedoch nicht unbedingt, dass metakompakte Räume lokal metakompakt sind. Es ergibt sich also keine Abschwächung.

Beispiel 50.5. *XXXX ist metakompakt, aber nicht lokal metakompakt.*

Beispiel 50.6. *XXXX ist lokal metakompakt, aber nicht metakompakt.*

Korollar 50.7. *Abgeschlossene Unterräume von lokal metakompakten Räumen sind lokal metakompakt.*

50.2 Schwache lokale Metakompaktheit

Da lokale Metakompaktheit keine Abschwächung von Metakompaktheit ist, wird ebenfalls eine andere noch weiter abgeschwächte Definition verwendet:

Definition 50.8 (schwach lokal metakompakt). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine metakompakte Umgebung besitzt, wird schwach lokal metakompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal metakompakt ist, wird schwach lokal metakompakt genannt.*

Korollar 50.9. *Lokal metakompakte Räume sind schwach lokal metakompakt.*

Korollar 50.10. *Metakompakte Räume sind schwach lokal metakompakt.*

Korollar 50.11. *Abgeschlossene Unterräume von schwach lokal metakompakten Räumen sind schwach lokal metakompakt.*

Kapitel 51

Parakompaktheit

Definition 51.1 (Parakompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den jede (abzählbare) offene Überdeckung eine lokalendliche Verfeinerung besitzt, wird (abzählbar) parakompakt genannt.*

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) wird die Menge seiner parakompakten Teilmengen als $\mathcal{O}_X^{\text{pc}}$ bezeichnet. Da lokalendliche Verfeinerungen nach Korollar (46.5) insbesondere punkttendlich sind, folgt:

Korollar 51.2. *Jeder (abzählbar) parakompakte Raum ist (abzählbar) metakompakt.*

Beispiel 51.3. *Die Dieudonné-Planke ist meta-, aber nicht parakompakt. XXXX ist abzählbar meta-, aber nicht abzählbar parakompakt.*

Lemma 51.4. *Jeder σ -kompakte Hausdorff-Raum ist metakompakt.*

Beweis. Sei X ein σ -kompakter Hausdorff-Raum, dann gibt es eine abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I} \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{i \in I} K_i$. XXXX \square

Lemma 51.5. *Abgeschlossene Unterräume von parakompakten topologischen Räumen sind parakompakt.*

Vergleiche mit Satz (47.2) für eine analoge Aussage über kompakte Räume sowie mit den Lemmata (50.2) und (54.3) für analoge Aussagen über meta- und lokalkompakte Räume.

Beweis. Seien X ein parakompakter topologischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , dann ist $(U_i)_{i \in I} \cup A^c$ eine offene Überdeckung von X . Da X parakompakt ist, existiert eine lokalendliche Verfeinerung $(U_i)_{i \in I' \subseteq I} \cup A^c$, womit $(U_i)_{i \in I' \subseteq I}$ eine lokalendliche Überdeckung von A ist. \square

Lemma 51.6. *Das Produkt eines kompakten mit einem parakompakten Raum ist parakompakt.*

Vergleiche mit Lemma (50.3) für eine analoge Aussage über metakompakte Räume.

Beweis. Seien X ein kompakter und Y ein parakompakter Raum. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. XXXX \square

Lemma 51.7. *Koprodukte (disjunkte Vereinigungen) von parakompakten Räumen (mit der Koprodukttopologie nach Definition (29.5)) sind parakompakt.*

Beweis. XXXX □

Beispiel 51.8. *Produkte von parakompakten Räumen sind nicht unbedingt parakompakt. Etwa ist die Sorgenfrey-Gerade parakompakt, aber die Sorgenfrey-Ebene (das Produkt zweier Sorgenfrey-Geraden mit der Produkttopologie nach Definition (29.1)) nicht parakompakt.*

Definition 51.9 (a-Parakompaktheit). XXXX

51.1 Lokale Parakompaktheit

Parakompaktheit kann genau wie andere topologische Eigenschaften durch die Verwendung von Umgebungen und der Teilraumtopologie von einer globalen Eigenschaft des ganzen topologischen Raumes in eine lokale Eigenschaft über dessen Struktur um einzelne Punkte umgewandelt werden.

Definition 51.10 (lokal parakompakt). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung eines Punktes jeweils eine parakompakte Umgebung von diesem enthält (also eine Umgebungsbasis aus parakompakten Mengen von diesem existiert), wird lokal parakompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal parakompakt ist, wird lokal parakompakt genannt.*

Mit dieser Definition, die häufig für die Einschränkung einer globalen auf eine lokale Eigenschaft verwendet wird, folgt jedoch nicht unbedingt, dass parakompakte Räume lokal parakompakt sind. Es ergibt sich also keine Abschwächung.

Beispiel 51.11. XXXX *ist parakompakt, aber nicht lokal parakompakt.*

Beispiel 51.12. XXXX *ist lokal parakompakt, aber nicht parakompakt.*

Korollar 51.13. *Abgeschlossene Unterräume von lokal parakompakten Räumen sind lokal parakompakt.*

51.2 Schwache lokale Parakompaktheit

Da lokale Metakompaktheit keine Abschwächung von Metakompaktheit ist, wird ebenfalls eine andere noch weiter abgeschwächte Definition verwendet:

Definition 51.14 (schwach lokal parakompakt). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine parakompakte Umgebung besitzt, wird schwach lokal parakompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal parakompakt ist, wird schwach lokal parakompakt genannt.*

Korollar 51.15. *Lokal parakompakte Räume sind schwach lokal parakompakt.*

Korollar 51.16. *Parakompakte Räume sind schwach lokal parakompakt.*

Korollar 51.17. *Abgeschlossene Unterräume von schwach lokal parakompakten Räumen sind schwach lokal parakompakt.*

Kapitel 52

Orthokompaktheit

Definition 52.1 (Innererhaltende Familie). *Eine Familie an Teilmengen eines topologischen Raumes, für die für jeden Punkte des Raumes der Schnitt der diesen enthaltenden Teilmengen der Familie offen ist wird innererhaltende Familie (oder Q-Familie) genannt.*

Korollar 52.2. *Eine punktendliche offene Überdeckung ist innererhaltend.*

Korollar 52.3. *Eine abzählbare offene Überdeckung eines P -Raumes ist innererhaltend.*

Korollar 52.4. *Eine offene Überdeckung eines Raumes mit Alexandroff-Topologie ist innererhaltend.*

Definition 52.5 (Orthokompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den für jede (abzählbare) offene Überdeckung eine innererhaltende offene Verfeinerung existiert, wird (abzählbar) orthokompakt genannt.*

Korollar 52.6. *Kompakte Räume sind orthokompakt.*

Aus Korollar (52.2) folgt direkt:

Korollar 52.7. *(Abzählbar) metakompakte Räume sind (abzählbar) orthokompakt.*

Mit Korollar (51.2) folgt weiter:

Korollar 52.8. *(Abzählbar) parakompakte Räume sind (abzählbar) orthokompakt.*

Aus Korollar (52.3) folgt direkt:

Korollar 52.9. *P -Räume sind abzählbar orthokompakt.*

Aus Korollar (52.4) folgt direkt:

Korollar 52.10. *Alexandroff-Räume sind orthokompakt.*

Lemma 52.11. *Abgeschlossene Unterräume von orthokompakten topologischen Räumen sind orthokompakt.*

Beweis. Seien X ein orthokompakter topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , dann ist $(U_i)_{i \in I} \cup A^c$ eine offene Überdeckung von X , wobei A^c offen ist, da A abgeschlossen ist. Da X orthokompakt ist, existiert eine innererhaltene offene Verfeinerung $(V_i)_{i \in I} \cup B$ über X mit $V_i \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und $B \subseteq A^c$, womit $(V_i)_{i \in I}$ eine innererhaltene offene Verfeinerung über A ist. \square

Lemma 52.12. *Eine stetige Abbildung bildet Orthokompakta auf Orthokompakta ab.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume, $K \subseteq X$ orthokompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, dann ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , da f stetig ist. Da K orthokompakt ist, existiert eine innererhaltende offene Verfeinerung XXXX \square

Lemma 52.13. *Für einen orthokompakten Raum X ist $X \times [0, 1]$ genau dann orthokompakt, wenn X abzählbar metakompakt ist.*

Beweis. XXXX \square

52.1 Lokale Orthokompaktheit

Orthokompaktheit kann genau wie andere topologische Eigenschaften durch die Verwendung von Umgebungen und der Teilraumtopologie von einer globalen Eigenschaft des ganzen topologischen Raumes in eine lokale Eigenschaft über dessen Struktur um einzelne Punkte umgewandelt werden.

Definition 52.14 (lokal orthokompakt). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung eines Punktes jeweils eine orthokompakte Umgebung von diesem enthält (also eine Umgebungsbasis aus orthokompakten Mengen von diesem existiert), wird lokal orthokompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal orthokompakt ist, wird lokal orthokompakt genannt.*

Mit dieser Definition, die häufig für die Einschränkung einer globalen auf eine lokale Eigenschaft verwendet wird, folgt jedoch nicht unbedingt, dass orthokompakte Räume lokal orthokompakt sind. Es ergibt sich also keine Abschwächung.

Beispiel 52.15. XXXX ist orthokompakt, aber nicht lokal orthokompakt.

Beispiel 52.16. XXXX ist lokal orthokompakt, aber nicht orthokompakt.

Korollar 52.17. *Abgeschlossene Unterräume von lokal orthokompakten Räumen sind lokal orthokompakt.*

52.2 Schwache lokale Orthokompaktheit

Da lokale Orthokompaktheit keine Abschwächung von Orthokompaktheit ist, wird ebenfalls eine andere noch weiter abgeschwächte Definition verwendet:

Definition 52.18 (schwach lokal orthokompakt). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine parakompakte Umgebung besitzt, wird schwach lokal orthokompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal orthokompakt ist, wird schwach lokal orthokompakt genannt.*

Korollar 52.19. *Lokal orthokompakte Räume sind schwach lokal orthokompakt.*

Korollar 52.20. *Orthokompakte Räume sind schwach lokal orthokompakt.*

Korollar 52.21. *Abgeschlossene Unterräume von schwach lokal orthokompakten Räumen sind schwach lokal orthokompakt.*

Kapitel 53

Hemikompaktheit

Definition 53.1 (Hemikompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den eine abzählbare Familie an kompakten Teilmengen existiert, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist, wird hemikompakt genannt.*

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) wird die Menge seiner hemikompakten Teilmengen als $\mathcal{O}_X^{\text{hc}}$ bezeichnet.

Für einen hemikompakten Raum X und eine Familie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an kompakten Teilmengen, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist, ist $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit:

$$K'_n = \bigcup_{k=1}^n K_k \supseteq K_n \quad (53.1)$$

nach Lemma (47.5) ebenfalls eine Familie an kompakten Teilmengen, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann daher für einen hemikompakten Raum sogar die Existenz einer aufsteigenden Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an kompakten Teilmengen (also mit $K_n \subseteq K_{n+1}$) ausgegangen werden, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist.

Korollar 53.2. *Kompakte Räume sind hemikompakt.*

Lemma 53.3. *Abgeschlossene Unterräume von hemikompakten topologischen Räumen sind hemikompakt.*

Beweis. Seien X ein hemikompakter topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann gibt es eine abzählbare Familie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ an kompakten Teilmengen, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist. Nach Lemma (47.2) ist $(K_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ eine abzählbare Familie an kompakten Teilmengen. Für $K \subseteq A$ kompakt ist insbesondere $K \subseteq X$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$, da X hemikompakt ist. Es folgt $K = K \cap A \subseteq K_n \cap A$. \square

Lemma 53.4. *Eine stetige Abbildung bildet Hemikompakta auf Hemikompakta ab.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume, $K \subseteq X$ hemikompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Da K hemikompakt ist, existiert eine abzählbare Familie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ an kompakten Teilmengen, sodass jede kompakte Teilmenge in einer davon enthalten ist. Nach Lemma (47.3) ist $(f(K_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f(K)$ eine abzählbare Familie an kompakten Teilmengen. XXXX \square

Lemma 53.5. *Lokalkompakte und σ -kompakte Räume sind hemikompakt.*

Vergleiche mit Lemma (54.10), nach dem lokalkompakte und σ -kompakte Räume stets parakompakt sind.

Beweis. Sei X ein lokalkompakter und σ -kompakter Raum. XXXX □

Beispiel 53.6. *Die Umkehrung von Lemma (53.5) gilt nicht für die erste Bedingung. \mathbb{Q} ist hemikompakt, aber nicht lokalkompakt.*

Es gelten die folgenden beiden Lemma:

Lemma 53.7. *Erst abzählbare und hemikompakte Räume sind lokalkompakt.*

Beweis. Sei X ein erst abzählbarer hemikompakter Raum, dann gibt es eine aufsteigende Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ an kompakten Teilmengen von X , sodass jede kompakte Teilmenge von X in einer davon enthalten ist. Sei $x \in X$ ein Punkt. Da X erst abzählbar ist, existiert eine absteigende Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an Umgebungen von x , sodass jede Umgebung von x in einer davon enthalten ist.

Angenommen, es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq K_n$, dann wäre $U_n \setminus K_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in U_n \setminus K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ (als Folge mit Grenzpunkt, XXXX: Referenz) kompakt, aber es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_n$, da $x_n \in K$ nach Definition von K , aber $x_n \notin K_n$ nach Definition von x_n . Das ist ein Widerspruch zur Hemikompaktheit, womit ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $U_n \subseteq K_n$. □

Lemma 53.8. *Hemikompakte Räume sind σ -kompakt.*

Beweis. Sei X ein hemikompakter Raum, dann gibt es eine abzählbare Familie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ an kompakten Teilmengen, sodass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_n$ existiert. Für jeden Punkt $x \in X$ ist die endliche Teilmenge $\{x\} \subseteq X$ nach XXXX kompakt, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\{x\} \subseteq K_n \Leftrightarrow x \in K_n$ und es folgt $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, womit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = X$. □

53.1 Lokale Hemikompaktheit

Orthokompaktheit kann genau wie andere topologische Eigenschaften durch die Verwendung von Umgebungen und der Teilraumtopologie von einer globalen Eigenschaft des ganzen topologischen Raumes in eine lokale Eigenschaft über dessen Struktur um einzelne Punkte umgewandelt werden.

Definition 53.9 (lokal hemikompakt). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung eines Punktes jeweils eine hemikompakte Umgebung von diesem enthält (also eine Umgebungsbasis aus hemikompakten Mengen von diesem existiert), wird lokal hemikompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal hemikompakt ist, wird lokal hemikompakt genannt.*

Mit dieser Definition, die häufig für die Einschränkung einer globalen auf eine lokale Eigenschaft verwendet wird, folgt jedoch nicht unbedingt, dass hemikompakte Räume lokal hemikompakt sind. Es ergibt sich also keine Abschwächung.

Beispiel 53.10. *XXXX ist hemikompakt, aber nicht lokal hemikompakt.*

Beispiel 53.11. *XXXX ist lokal hemikompakt, aber nicht hemikompakt.*

Korollar 53.12. *Abgeschlossene Unterräume von lokal hemikompakten Räumen sind lokal hemikompakt.*

53.2 Schwache lokale Hemikompaktheit

Da lokale Hemikompaktheit keine Abschwächung von Hemikompaktheit ist, wird ebenfalls eine andere noch weiter abgeschwächte Definition verwendet:

Definition 53.13 (schwach lokal hemikompakt). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine hemikompakte Umgebung besitzt, wird schwach lokal hemikompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokal hemikompakt ist, wird schwach lokal hemikompakt genannt.*

Korollar 53.14. *Lokal hemikompakte Räume sind schwach lokal hemikompakt.*

Korollar 53.15. *Hemikompakte Räume sind schwach lokal hemikompakt.*

Korollar 53.16. *Abgeschlossene Unterräume von schwach lokal hemikompakten Räumen sind schwach lokal hemikompakt.*

Kapitel 54

Lokalkompaktheit

Definition 54.1 (Lokalkompaktheit). *Ein topologischer Raum, für den jede Umgebung eines Punktes jeweils eine kompakte Umgebung von diesem enthält (also eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen von diesem existiert), wird lokalkompakt in diesem Punkt genannt. Ein topologischer Raum, welcher in jedem Punkt lokalkompakt ist, wird lokalkompakt genannt.*

Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) wird die Menge seiner lokalkompakten Teilmengen als $\mathcal{O}_X^{\text{lc}}$ bezeichnet.

Korollar 54.2. *Kompakte topologische Räume sind lokalkompakt.*

Lemma 54.3. *Abgeschlossene Teilmengen von lokalkompakten Räumen sind lokalkompakt.*

Vergleiche mit Satz (47.2) für eine analoge Aussage über kompakte Räume sowie mit den Lemmata (50.2) und (51.5) für analoge Aussagen über meta- und parakompakte Räume.

Beweis. XXXX □

Beispiel 54.4. *Stetige Bilder von lokalkompakten Räumen müssen nicht lokalkompakt sein. Etwa ist die Warschauer Sinuskurve X nicht lokalkompakt, aber das stetige Bild des lokalkompakten Raumes $\{-1\} \cup (0; 1]$ durch $\{-1\} \cup (0; 1] \rightarrow X$, XXXX*

Lemma 54.5. *Offene Teilmengen von kompakten Hausdorff-Räumen sind lokalkompakte Hausdorff-Räume.*

Nach den Lemmata (47.2) und (72.8) sind dagegen abgeschlossene Teilmengen von kompakten Hausdorff-Räumen sogar wieder kompakte Hausdorff-Räume.

Beweis. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach (72.8) ist A ein Hausdorff-Raum. XXXX □

Lemma 54.6. *Eine stetige und eigentliche Abbildung in einen lokalkompakten Raum ist abgeschlossen.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume mit Y lokalkompakt sowie $f: X \rightarrow Y$ stetig und eigentlich. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. XXXX □

Lemma 54.7. *Teilmengen von lokalkompakten Hausdorff-Räumen sind genau dann lokalkompakt, wenn sie die Vereinigung einer abgeschlossenen und offenen Menge sind.*

Beweis. XXXX □

Lemma 54.8. *Jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge eines kompakten Raumes.*

Beweis. XXXX □

Lemma 54.9. *Eine stetige und eigentliche Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y mit letzterem lokalkompakt ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $A \subset X$ abgeschlossen, dann XXXX □

Lemma 54.10. *Lokalkompakte und σ -kompakte Räume sind parakompakt.*

Vergleiche mit Lemma (53.5), nach dem lokalkompakte und σ -kompakte Räume stets hemikompakt sind.

Beweis. XXXX □

Beispiel 54.11. *Die Umkehrung von Lemma (54.10) gilt für keine der beiden Bedingungen. Die Sorgenfrey-Gerade ist parakompakt, aber weder lokal- noch σ -kompakt.*

Lemma 54.12. *Zweitabzählbare lokalkompakte Räume sind σ -kompakt (und nach Lemma (54.10) parakompakt).*

Vergleiche mit Lemma (74.9), nach dem zweitabzählbare reguläre Räume stets parakompakt sind.

Beweis. XXXX □

Lemma 54.13. *Für einen lokalkompakten Raum K erhält der Funktor $K \times -: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ kokartesische Quadrate.*

Beweis. XXXX □

54.1 Lindelöf-Raum

Definition 54.14 (Lindelöf-Raum). *Ein topologischer Raum, für den jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung enthält, wird Lindelöf-Raum genannt.*

Lemma 54.15. *Jeder zweitabzählbare topologische Raum ist lindelöfsch.*

Beweis. XXXX □

Definition 54.16 (S-Raum). *Ein regulärer Raum, für den jede Teilmenge (mit der Teilraumtopologie) seperabel ist und der kein Lindelöf-Raum ist, wird S-Raum genannt.*

Definition 54.17 (L-Raum). *Ein regulärer Raum, für den jede Teilmenge (mit der Teilraumtopologie) ein Lindelöf-Raum ist und der nicht seperabel ist, wird L-Raum genannt.*

54.2 Erschöpfung durch kompakte Teilmengen

Definition 54.18 (Erschöpfung durch kompakte Teilmengen). *Ein topologischer Raum X , für den eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ an kompakten Teilmengen mit*

Lemma 54.19. *Für einen topologischen Raum sind äquivalent:*

- I.) X ist erschöpfbar durch kompakte Teilmengen.*
- II.) X ist σ -kompakt und schwach lokalkompakt.*
- III.) X ist lindelöfsch und schwach lokalkompakt.*

Beweis. XXXX

□

Lemma 54.20. *Jeder reguläre und durch kompakte Teilmengen erschöpfbare Raum ist parakompakt.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 55

Alexandroff-Kompaktifizierung

Die Alexandroff-Kompaktifizierung ist das wichtigste und weitreichendste Verfahren, um einen topologischen Raum zu einem kompakten topologischen Raum zu erweitern. Dabei wird nur ein einziger neuer Punkt hinzugefügt und die Topologie geeignet erweitert, wobei die Teilraumtopologie des ursprünglichen Raumes auch wieder die ursprüngliche Topologie ist. Die Alexandroff-Kompaktifizierung wird vor allem für topologische Konstruktionen verwendet, die der euklidischen Räume \mathbb{R}^n ergibt etwa die Sphären S^n und die der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} ergibt etwa die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

Satz 55.1 (Alexandroff-Kompaktifizierung). *Für einen topologischen Raum X ist $X^* := X \cup \{\infty\}$, dessen offene Mengen gerade die offenen Mengen von X sowie die Komplemente abgeschlossener kompakter Mengen von X in X^* sind¹:*

$$\mathcal{O}_{X^*} = \mathcal{O}_X \cup \{X^* \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\} \quad (55.1)$$

ein kompakter topologischer Raum, der Alexandroff-Kompaktifizierung genannt wird:

Die Alexandroff-Kompaktifizierung wird auch *Einpunkt-Kompaktifizierung* genannt.

Beweis. XXXX □

Lemma 55.2. *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, wenn X^* ein Hausdorff-Raum ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 55.3. *Für einen XXXX topologischen Raum X und eine XXXX Teilraum $Y \subseteq X$ ist:*

$$X/Y \cong (X \setminus Y)^*. \quad (55.2)$$

Beweis. XXXX

$$\begin{array}{ccc} Y \setminus X & \xrightarrow{i_1} & Y & \xrightarrow{q} & Y/X \\ & & \downarrow i_2 & & \\ & & (Y \setminus X)^* & & \end{array}$$

□

Lemma 55.4. *Für lokalkompakte Hausdorff-Räume X und Y sowie eine eigentliche Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist $f^*: X^* \rightarrow Y^*$ stetig.*

¹Dabei wird $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ unter der Inklusion $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X^*)$ als Teilmenge von $\mathcal{P}(X^*)$ betrachtet.

Beweis. XXXX □

Lemma 55.5. *Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum X und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ (mit kanonischer Inklusion $i: A \hookrightarrow X$) ist $i^*: A^* \hookrightarrow X^*$ stetig.*

Beweis. XXXX □

Lemma 55.6. *Die Alexandroff-Kompaktifizierung bildet jeweils disjunkte Vereinigungen (Koprodukte) und Produkte auf Wedge-Summen und Smash-Produkte ab. Seien X und Y lokalkompakte Hausdorff-Räume, dann ist:*

$$(X + Y)^* \cong X^* \vee Y^* \tag{55.3}$$

$$(X \times Y)^* \cong X^* \wedge Y^*. \tag{55.4}$$

Beweis. XXXX □

Lemma 55.7. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X kompakt, ist X^* nicht zusammenhängend. Ist X nicht kompakt und zusammenhängend, dann ist X^* zusammenhängend.*

Beweis. I.): Ist X kompakt, dann ist $\{\infty\} = X^* \setminus X$ offen, also $X^* = X \cup \{\infty\}$ eine disjunkte Aufteilung in offene Mengen. II.): Seien $U, V \subseteq X^*$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X^*$ sowie $\infty \in U$ o.B.d.A., wobei $U \neq \{\infty\} = X^* \setminus X$, da X nicht kompakt ist. Nun ist $V = X^* \setminus U$ abgeschlossen und offen mit $V \neq X$, weshalb $V = \emptyset$, da X zusammenhängend ist. □

Ist die Alexandroff-Kompaktifizierung zusammenhängend folgt jedoch nicht, dass der zugrundeliegende topologische Raum bereits zusammenhängend ist. Seien X und Y nicht-kompakte und zusammenhängende Räume, dann sind X^* und Y^* nach Lemma (55.7) zusammenhängend, womit $(X + Y)^* \cong X^* \vee Y^*$ nach Korollar (??) zusammenhängend ist, obwohl $X + Y$ nicht zusammenhängend ist.

Lemma 55.8. *Für einen (nichtleeren) topologischen Raum X , eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ und einen Punkt $x \in X$ ist $x_n \rightarrow x$ genau dann, wenn die Abbildung $f: \mathbb{N}^* \rightarrow X, n \mapsto x_n, \infty \mapsto x$ stetig ist, wobei \mathbb{N} die diskrete Topologie trägt.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen mit $x \notin U$, dann ist $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{N}$ stets offen, es kann sich daher auf offene Umgebungen von x /Stetigkeit in ∞ beschränkt werden. XXXX □

Für einen topologischen Raum X und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, für welche die Fortsetzung $f^*: X^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x), \infty \rightarrow 0$ stetig ist, *verschwindet f bei ∞* . Das ist äquivalent dazu, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subseteq X$ mit $f(X \setminus K) \subseteq B_\varepsilon(0)$ gibt.

Definition 55.9 (Mehrpunkt-Kompaktifizierung). *Für einen topologischen Raum X und einen kompakten topologischen Raum Y wird eine Abbildung:*

$$i: X \rightarrow Y, \tag{55.5}$$

die ein Homöomorphismus zwischen X und $i(X)$ ist und für die $|Y \setminus i(X)| = n$, eine n -Punkt-Kompaktifizierung genannt.

Kapitel 56

Stone–Čech-Kompaktifizierung

Satz 56.1 (Stone–Čech-Kompaktifizierung). **cHaus** ist eine reflektive Unterkategorie von **Top**. Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor (Reflektor), nämlich die Stone–Čech-Kompaktifizierung:

$$\mathbf{cHaus} \xleftarrow[\perp]{\beta} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Da **cHaus** eine volle und reflektive Unterkategorie der nach Lemma (XXXX) kovollständigen Kategorie **Top** ist, folgt:

Korollar 56.2. **cHaus** ist kovollständig, enthält also alle kleinen Kolimiten.

Satz 56.3 (Stone–Čech-Kompaktifizierung). Für einen topologischen Raum X gibt es nur einen kompakten Hausdorff-Raum βX mit einer Einbettung $\iota_X: X \rightarrow \beta X$, sodass für jeden anderen kompakten Hausdorff-Raum K und jede stetige Abbildung $f \in C(X, K)$ eine eindeutige stetige Abbildung $\beta f: \beta X \rightarrow K$ mit $f = \beta f \circ \iota_X$ existiert.

Definition 56.4 (Stone–Čech-Kompaktifizierung). Für einen topologischen Raum X ist βX dessen Stone–Čech-Kompaktifizierung.

Die Stone–Čech-Kompaktifizierung eines topologischen Raumes X lässt sich explizit angeben. Sei $[0, 1]$ mit der vom Betrag induzierten Topologie ausgestattet und sei:

$$i: X \rightarrow [0, 1]^{C(X, [0, 1])}, x \rightarrow (\text{ev}_x: f \mapsto f(x)) \quad (56.1)$$

die Abbildung auf die Auswertungsabbildung. Da $[0, 1]$ kompakt ist, ist $[0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ nach dem Satz von Tychonoff (47.15) ebenso kompakt, womit $i(X)$ als Teilraum ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

Lemma 56.5. Für einen kompakten Hausdorff-Raum X sind βX und X homöomorph.

Beweis. XXXX □

Definition 56.6 (Korona). Für einen topologischen Raum X wird die Menge $\beta X \setminus X$ seine Corona (oder Corona-Menge) genannt.

Die Korona der natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wird auch als:

$$\mathbb{N}^* := \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad (56.2)$$

bezeichnet, obwohl diese Notation mit ihrer Alexandroff-Kompaktifizierung verwechselt werden könnte.

Lemma 56.7. *$\beta\mathbb{Z}$ ist nicht erstabzählbar (und nach Lemma (XXXX) nicht metrisierbar).*

Beweis. XXXX □

56.1 Konstruktion über Ultrafilter

$$\beta X := \{\text{Ultrafilter auf } X\} \quad (56.3)$$

$$\widehat{A} = \{\mathcal{F} \in \beta X \mid A \in \mathcal{F}\} \quad (56.4)$$

Sei X ein topologischer Raum mit einer (nicht unbedingt stetigen) assoziativen Verknüpfung $\circ: X \times X \rightarrow X$. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ sei:

$$xA := x \circ A := \{x \circ a \mid a \in A\} \quad (56.5)$$

$$Ax := A \circ x := \{a \circ x \mid a \in A\}. \quad (56.6)$$

Schnitte und Vereinigungen werden dabei beibehalten. Für Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt also $x(A \cap B) = xA \cap xB$ bzw. $(A \cap B)x = Ax \cap Bx$ und $x(A \cup B) = xA \cup xB$ bzw. $(A \cup B)x = Ax \cup Bx$. Für ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei:

$$x\mathcal{F} := x \circ \mathcal{F} := \{xA \mid A \in \mathcal{F}\} \quad (56.7)$$

$$\mathcal{F}x := \mathcal{F} \circ x := \{Ax \mid A \in \mathcal{F}\}. \quad (56.8)$$

Lemma 56.8. *Für einen Filter \mathcal{F} auf X und ein Element $x \in X$ sind $x\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}x$ ebenso Filter auf X .*

Beweis. XXXX □

Lemma 56.9. *Für einen Ultrafilter \mathcal{F} auf X , also $\mathcal{F} \in \beta X$, und ein Element $x \in X$ sind $x\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}x$ ebenso Ultrafilter auf X , also $x\mathcal{F}, \mathcal{F}x \in \beta X$.*

Beweis. XXXX □

Lemma 56.10. *Für eine topologische Halbgruppe X mit stetiger assoziativer Verknüpfung $\circ: X \times X \rightarrow X$ gibt es genau eine stetige assoziative Verknüpfung $\circ: \beta X \times \beta X \rightarrow \beta X$, sodass $X \hookrightarrow \beta X$ ein Halbgruppenhomomorphismus ist.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 57

Bohr-Kompaktifizierung

Satz 57.1 (Bohr-Kompaktifizierung). **cHausGrp** ist eine reflektive Unterkategorie von **TopGrp**. Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor (Reflektor), nämlich die Bohr-Kompaktifizierung:

$$\mathbf{cHausGrp} \xleftarrow{\text{Bohr}} \mathbf{TopGrp}$$

Beweis. XXXX

□

Da **cHausGrp** eine volle und reflektive Unterkategorie der nach Lemma (XXXX) kovollständigen Kategorie **TopGrp** ist, folgt:

Korollar 57.2. **cHausGrp** ist kovollständig, enthält also alle kleinen Kolimiten.

Teil VII
Topologische Kategorien

Kapitel 58

Kategorie der topologischen Räume

Definition 58.1 (Kategorie der topologischen Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller topologischen Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

ist die Kategorie der topologischen Räume, notiert als \mathbf{Top} .

Die Erfüllung der Eigenschaften einer Kategorie folgt dabei aus Beispiel (27.2), wonach Identitäten stetig sind, und Lemma (27.3), wonach Kompositionen von stetigen Abbildungen stetig sind.

58.1 Kategorie der punktierten topologischen Räume

Definition 58.2 (Kategorie der punktierten topologischen Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller punktierten topologischen Räume als Objekte*
- *der Klasse aller punktierten stetigen Abbildungen als Morphismen*

ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume, notiert als \mathbf{Top}_ .*

58.2 Kategorie der kompakten topologischen Räume

Definition 58.3 (Kategorie der kompakten topologischen Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller kompakten topologischen Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

ist die Kategorie der kompakten topologischen Räume, notiert als \mathbf{Top}^1 .

¹Ebenfalls üblich ist \mathbf{cTop} , doch diese Notation wird ebenfalls für die Kategorie der kosimplizialen Objekte in \mathbf{Haus} verwendet.

Kapitel 59

Kategorie der Hausdorff-Räume

Definition 59.1 (Kategorie der Hausdorff-Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller Hausdorff-Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

*ist die Kategorie der Hausdorff-Räume, notiert als **Haus**.*

59.1 Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume

Definition 59.2 (Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller kompakten Hausdorff-Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

*ist die Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume, notiert als **Haus**.*¹

59.2 Kategorie der schwachen Hausdorff-Räume

Definition 59.3 (Kategorie der schwachen Hausdorff-Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller schwachen Hausdorff-Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

*ist die Kategorie der schwachen Hausdorff-Räume, notiert als **wHaus**.*

¹Ebenfalls üblich ist **cHaus**, doch diese Notation wird ebenfalls für die Kategorie der kosimplizialen Objekte in **Haus** verwendet.

Kapitel 60

Kategorie der kompakt generierten topologischen Räume

Definition 60.1 (Kategorie der kompakt generierten topologischen Räume). *Die Kategorie mit:*

- der Klasse aller kompakt generierten topologischen Räume als Objekte
- der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen

ist die Kategorie der kompakt generierten topologischen Räume, notiert als \mathbf{cgTop} .

60.1 Kategorie der kompakt generierten Hausdorff-Räume

Definition 60.2 (Kategorie der kompakt generierten Hausdorff-Räume). *Die Kategorie mit:*

- der Klasse aller kompakt generierten Hausdorff-Räume als Objekte
- der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen

ist die Kategorie der kompakt generierten Hausdorff-Räume, notiert als \mathbf{cgHaus} .

\mathbf{Top} ist nach Bemerkung (XXXX) nicht kartesisch abgeschlossen,

Lemma 60.3. \mathbf{cgHaus} ist kartesisch abgeschlossen.

Beweis. XXXX

□

Lemma 60.4. \mathbf{cgHaus} ist regulär.

Beweis. XXXX

□

60.2 Kategorie der kompakt generierten schwachen Hausdorff-Räume

Definition 60.5 (Kategorie der kompakt generierten schwachen Hausdorff-Räume). *Die Kategorie mit:*

- *der Klasse aller kompakt generierten schwachen Hausdorff-Räume als Objekte*
- *der Klasse aller stetigen Abbildungen als Morphismen*

*ist die Kategorie der kompakt generierten schwachen Hausdorff-Räume, notiert als **cgwHaus**.*

Lemma 60.6. *cgwHaus ist regulär.*

Beweis. XXXX

□

Teil VIII
Fortgeschrittene Topologie

Kapitel 61

Pseudokompaktheit und stark zusammenhängende Räume

Definition 61.1 (Pseudokompaktheit). *Ein topologischer Raum X , für den jede stetige Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei \mathbb{R} die kanonische Topologie trägt) beschränkt ist, wird pseudokompakt genannt.*

Definition 61.2 (Stark zusammenhängender Raum). *Ein topologischer Raum X , für den jede stetige Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei \mathbb{R} die kanonische Topologie trägt) konstant ist, wird stark zusammenhängend genannt.*

Korollar 61.3. *Stark zusammenhängende Räume sind pseudokompakt.*

Lemma 61.4. *Hyper- und ultrazusammenhängende Räume sind stark zusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Lemma 61.5. *Stark zusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. Ist ein topologischer Raum X nicht zusammenhängend, dann gibt es nach Lemma (XXXX) eine surjektive stetige Abbildung $X \rightarrow \{0, 1\}$ (wobei $\{0, 1\}$ die diskrete Topologie trägt). Durch Nachkomposition mit der kanonischen Inklusion $\{0, 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine nichtkonstante stetige Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$, womit X nicht stark zusammenhängend ist. □

Lemma 61.6. *Zusammenhängende Räume, die kleiner sind als das Kontinuum, sind stark zusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 62

H-abgeschlossene und KC-Räume

Kompakte Räume und Hausdorff-Räume spielen aufgrund ihrer weitreichend verwendbaren Eigenschaften eine entscheidende Schlüsselrolle in der Topologie. Etwa stellen sie eine Verbindung zwischen abgeschlossenen und kompakten Teilmengen her: In kompakten Räumen sind abgeschlossene Teilmengen nach Satz (47.2) kompakt und in Hausdorff-Räumen sind kompakte Teilmengen nach Lemma (72.11) abgeschlossen.

62.1 H-abgeschlossene Räume

Definition 62.1 (H-abgeschlossen). *Ein topologischer Raum, der in jedem hausdorffschen Oberraum abgeschlossen ist, wird H-abgeschlossen (oder Hausdorff-abgeschlossen) genannt.*

H-abgeschlossene Räume wurden im Jahr 1924 von XXXX Alexandroff und XXXX Urysohn eingeführt. H-Abgeschlossenheit ist nach Lemma (72.11) eine Verallgemeinerung von Kompaktheit:

Korollar 62.2. *Kompakte topologische Räume sind H-abgeschlossen.*

Die Umkehrung gilt nicht unbedingt, jedoch unter Hinzunahme der weiteren Bedingung der Regularität, siehe Lemma (74.8).

62.2 Katětovsche und Fominische H-abgeschlossene Erweiterung

XXXX

62.3 KC-Räume

Definition 62.3 (KC-Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede kompakte Teilmenge abgeschlossen ist, ist ein KC-Raum.*

KC-Räume sind nach Lemma (72.11) eine Verallgemeinerung von Hausdorff-Räumen:

Korollar 62.4. *Hausdorff-Räume sind KC-Räume.*

Kapitel 63

k-Räume

Definition 63.1 (k-Raum). *Ein topologischer Raum X , für den eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A \cap K \subseteq X$ für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist ein k-Raum (auch Kelley-Raum oder kompakt generiert).*

Die Kategorie der k-Räume wird als **cgTop** (cg, eng. *compactly generated*) bezeichnet und die Kategorie der k-Hausdorff-Räume wird als **cgHaus** bezeichnet.

Lemma 63.2. *Lokalkompakte topologische Räume sind k-Räume.*

Es gibt daher kanonische Inklusionen **lcTop** \hookrightarrow **cgTop** und **lcHaus** \hookrightarrow **cgHaus**.

Beweis. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. XXXX □

Nach Korollar (54.2) sind kompakte Räume insbesondere lokalkompakt, womit:

Korollar 63.3. *Kompakte topologische Räume sind k-Räume.*

Es gibt daher kanonische Inklusionen **cTop** \hookrightarrow **cgTop** und **cHaus** \hookrightarrow **cgHaus**.

Lemma 63.4. *Erst abzählbare Hausdorff-Räume sind k-Räume.*

Beweis. Sei X ein erst abzählbarer Hausdorff-Raum. XXXX □

Lemma 63.5. *Das Produkt eines k-Raumes mit einem lokalkompakten Hausdorff-Raum ist ein k-Raum.*

Beweis. XXXX □

Lemma 63.6. *Ein topologischer Raum ist genau dann ein k-Raum, wenn er ein Quotientenraum eines lokalkompakten Hausdorff-Raumes ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 63.7. *Eine eigentliche Abbildung von einem k-Hausdorff-Raum in einen k-Hausdorff-Raum ist stetig.*

Beweis. (Siehe [8], Lemma 2.3.14. auf Seite 115.) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung zwischen k-Hausdorff-Räumen X und Y . Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen, dann ist $A \cap K \subseteq Y$ abgeschlossen für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq Y$. XXXX □

63.1 k-Funktor (Kelleyfizierung)

Lemma 63.8. \mathbf{cgTop} ist eine koreflektive Unterkategorie von \mathbf{Top} . Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor (Koreflektor), nämlich den k -Funktor (Kelleyfizierung):

$$\mathbf{cgTop} \begin{array}{c} \xrightarrow{\subset} \\ \xleftarrow[k]{\perp} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Das Produkt von k -Räumen X und Y ist im Allgemeinen kein k -Raum, daher sei:

$$X \times_k Y := k(X \times Y). \quad (63.1)$$

Lemma 63.9. Für einen topologischen Raum X ist $K \subseteq X$ genau dann kompakt, wenn $K \subseteq k(X)$ kompakt ist.

Beweis. XXXX □

Lemma 63.10. Für einen topologischen Raum X ist die von der Koeinheit der Adjunktion in Lemma (63.8) induzierte stetige Abbildung $k(X) \rightarrow X$ eine schwache Homotopieäquivalenz.

Beweis. XXXX □

Lemma 63.11. Für k -Räume X und Y ist die Abbildung:

$$k(C_{\text{co}}(X, Y)) \times_k X \rightarrow Y, (f, x) \mapsto f(x) \quad (63.2)$$

stetig.

Beweis. XXXX □

63.2 Modellstruktur auf \mathbf{cgTop}

Lemma 63.12. Die Quillen-Modellstruktur auf \mathbf{Top} schränkt sich durch $\mathbf{cgTop} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ zu einer Quillen-Modellstruktur auf \mathbf{cgTop} ein. Es ergibt sich aus Lemma (63.8) eine Quillenäquivalenz:

$$\mathbf{cgTop}_{\text{Qu}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\simeq_{\text{Qu}}} \\ \xleftarrow[k]{\perp} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$$

Beweis. XXXX □

\mathbf{Top}_{Qu} ist nicht kartesisch abgeschlossen und daher keine monoidale Modellkategorie, jedoch gilt:

Lemma 63.13. $\mathbf{cgTop}_{\text{Qu}}$ ist eine symmetrische monoidale Modellkategorie.

Beweis. XXXX □

Kapitel 64

Schwache Hausdorff-Räume

Definition 64.1 (Schwacher Hausdorff-Raum). *Ein topologischer Raum X , für den für jeden kompakten Hausdorff-Raum K und jede stetige Abbildung $f: K \rightarrow X$ das Bild $f(K) \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist ein schwacher Hausdorff-Raum.*

Nach Lemma (47.3) ist $f(K)$ stets kompakt. Nach Lemma (72.11) ist $f(K)$ daher abgeschlossen, wenn X ein Hausdorff-Raum ist, weshalb:

Korollar 64.2. *Hausdorff-Räume sind schwache Hausdorff-Räume.*

Die Kategorie der schwachen Hausdorff-Räume wird als **wHaus** (w, eng. *weak*) bezeichnet und die Kategorie der schwachen k -Hausdorff-Räume wird als **cgwHaus** bezeichnet. Nach Korollar (64.2) gibt es eine kanonische Inklusion **Haus** \hookrightarrow **wHaus**, die sich zu einer kanonischen Inklusion **cgHaus** \hookrightarrow **cgwHaus** einschränkt.

Lemma 64.3. *cgHaus und cgwHaus sind reguläre Kategorien.*

Beweis. XXXX □

64.1 h-Funktor

Lemma 64.4. *cgwHaus ist eine reflektive Unterkategorie von cgHaus. Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor (Reflektor), nämlich den h -Funktor:*

$$\mathbf{cgwHaus} \underset{\perp}{\overset{h}{\leftarrow}} \mathbf{cgHaus}$$

Beweis. XXXX □

64.2 Modellstruktur auf cgwHaus

Lemma 64.5. *Die Quillen-Modellstruktur auf **cgTop** nach Lemma (63.12) schränkt sich durch **cgwHaus** \hookrightarrow **cgTop** zu einer Quillen-Modellstruktur auf **cgwHaus** ein. Es ergibt sich aus Lemma (64.4) eine Quillenäquivalenz:*

$$\mathbf{cgwHaus}_{\text{Qu}} \underset{\simeq_{\text{Qu}}}{\overset{h}{\leftarrow}} \mathbf{cgTop}_{\text{Qu}}$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 65

Δ -generierte Räume

65.1 d-Funktor

Lemma 65.1. *\mathbf{DTop} ist eine koreflektive Unterkategorie von \mathbf{Top} . Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor (Koreflektor), nämlich den d -Funktor:*

$$\mathbf{DTop} \begin{array}{c} \xrightarrow{\perp} \\ \xleftarrow{d} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX

□

65.2 Modellstruktur auf \mathbf{DTop}

Lemma 65.2. *Die Quillen-Modellstruktur auf \mathbf{Top} schränkt sich durch $\mathbf{DTop} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ zu einer Quillen-Modellstruktur auf \mathbf{DTop} ein. Es ergibt sich aus Lemma (65.1) eine Quillenäquivalenz:*

$$\mathbf{DTop}_{\text{Qu}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\simeq_{\text{Qu}}} \\ \xleftarrow{d} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$$

Beweis. XXXX

□

Kapitel 66

Diffeologische Räume

Definition 66.1 (Diffeologischer Raum). XXXX

Lemma 66.2. \mathbf{DTop} ist eine reflektive Unterkategorie von $\mathbf{Difflog}$. Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor:

$$\mathbf{DTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \lrcorner \perp \rrightarrow \end{array} \mathbf{Difflog}$$

Beweis. XXXX □

$$\mathbf{Difflog} \begin{array}{c} \xleftarrow{|\cdot|_{\text{diff}}} \\ \lrcorner \perp \rrightarrow \\ \text{Sing}_{\text{diff}} \end{array} \mathbf{sSet}$$

66.1 Diffeologische Topologie (D-Topologie)

XXXX

66.2 Modellstruktur auf $\mathbf{Difflog}$

Da $\mathbf{Difflog}$ keine Unterkategorie einer topologischen Kategorie mit Modellstruktur ist, kann keine durch Einschränkung übertragen werden. XXXX

Lemma 66.3. Es ergibt sich eine Quillenäquivalenz:

$$\mathbf{DTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \lrcorner \simeq_{\text{Qu}} \rrightarrow \end{array} \mathbf{Difflog}$$

Beweis. XXXX □

$$\mathbf{Top} \begin{array}{c} \xleftarrow{\simeq_{\text{Qu}}} \\ \lrcorner \xrightarrow{d} \end{array} \mathbf{DTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \lrcorner \simeq_{\text{Qu}} \rrightarrow \end{array} \mathbf{Difflog}$$

Kapitel 67

Glatte Abbildungen und Diffeomorphismen

Lemma 67.1. Für diffeologische Räume X , Y und Z ist die Abbildung:

$$C^\infty(X, Y) \times C^\infty(Y, Z) \rightarrow C^\infty(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f \quad (67.1)$$

Beweis. XXXX □

Lemma 67.2. Für diffeologische Räume X , Y und Z ist die Abbildung:

$$C^\infty(X \times Y, Z) \rightarrow C^\infty(X, C^\infty(Y, Z)), f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y))) \quad (67.2)$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis. XXXX □

Kapitel 68

Induzierte und koinduzierte Diffeologie

Ähnlich wie induzierte und koinduzierte Topologien entlang von Abbildungen, wodurch diese per Definition stetig werden, lassen sich ebenfalls induzierte und koinduzierte Diffeologien entlang von Abbildungen betrachten, wodurch diese per Definition glatt werden.

68.1 Induzierte Diffeologie

Definition 68.1 (Induzierte Diffeologie). *Für eine Menge X , einen diffeologischen Raum (Y, \mathcal{D}_Y) und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f_*\mathcal{D}_Y := \{p \in \text{???} \mid f \circ p \in \mathcal{D}_Y\} \quad (68.1)$$

eine Diffeologie auf X , die induzierte Diffeologie genannt wird.

Lemma 68.2. *Die D -Topologie der induzierten Diffeologie ist die induzierte Topologie der D -Topologie. Sei X eine Menge, (Y, \mathcal{D}_Y) ein diffeologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, dann gilt:*

$$d(f_*\mathcal{D}_Y) = f_*d(\mathcal{D}_Y). \quad (68.2)$$

Beweis. XXXX □

68.2 Koduzierte Diffeologie

Definition 68.3 (Koduzierte Diffeologie). *Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{D}_X) , eine Menge Y und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f^*\mathcal{D}_X := \{f \circ p \mid p \in \mathcal{D}_X\} \quad (68.3)$$

eine Diffeologie auf Y , die koinduzierte Diffeologie genannt wird.

Lemma 68.4. *Die D -Topologie der koinduzierten Diffeologie ist die koinduzierte Topologie der D -Topologie. Sei (X, \mathcal{D}_X) , ein diffeologischer Raum, Y eine Menge und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, dann gilt:*

$$d(f^*\mathcal{D}_X) = f^*d(\mathcal{D}_X). \quad (68.4)$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 69

Induktionen und Subduktionen

Ähnlich wie Immersionen und Submersionen für glatte Abbildungen zwischen glatte Mannigfaltigkeiten gibt es für glatte Abbildungen zwischen diffeologischen Räumen ebenfalls Möglichkeiten zur Messung von lokaler Injektivität und lokaler Surjektivität:

Definition 69.1. *Eine glatte Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen diffeologischen Räumen X und Y wird*

- *Induktion genannt, wenn die Diffeologie auf X die durch f zurückgezogene Diffeologie von Y ist.*
- *Subduktion genannt, wenn die Diffeologie auf Y die durch f vorgeschobene Diffeologie von X ist.*

Lemma 69.2. *Für glatte Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwischen diffeologischen Räumen X , Y und Z ist $g \circ f$ genau dann eine Induktion, wenn g eine Induktion ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 69.3. *Für glatte Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwischen diffeologischen Räumen X , Y und Z ist $g \circ f$ genau dann eine Subduktion, wenn f eine Subduktion ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 69.4. *Für eine glatte Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen diffeologischen Räumen X und Y ist äquivalent:*

- *f ist eine injektive Subduktion.*
- *f ist eine surjektive Induktion.*
- *f ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis. XXXX □

Lemma 69.5. *Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Subduktion diffeologischer Räume X und Y . Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit einem weiteren diffeologischen Raum X ist genau dann*

- *glatt, wenn $f \circ p$ glatt ist.*
- *eine Subduktion, wenn $f \circ p$ eine Subduktion ist.*

Beweis. XXXX □

Teil IX
Trennungaxiome

Kapitel 70

Kolmogoroff-Räume (T_0 -Räume)

Definition 70.1 (Trennungsaxiom T_0).

Definition 70.2 (Kolmogoroff-Raum). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_0 erfüllt, wird Kolmogoroff-Raum genannt.*

Lemma 70.3. *Ein uniformer Raum induziert genau dann einen Kolmogoroff-Raum, wenn der Schnitt aller Nachbarschaften die Diagonale ist.*

Beweis. XXXX □

70.1 Kolmogoroff-Quotient

Mithilfe von Äquivalenzrelationen können Punkte eines topologischen Raumes miteinander identifiziert werden und durch die Quotiententopologie zu einem Punkt vereinigt werden. Wird die Äquivalenzrelation der XXXX aus der die Definition der Kolmogoroff-Eigenschaft dafür verwendet, ergibt sich eine kanonische Möglichkeit zur Erzeugung eines Kolmogoroff-Raumes aus einem beliebigen topologischen Raum.

Definition 70.4 (Kolmogoroff-Quotient). *Für einen topologischen Raum X ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation der Nichtunterscheidbarkeit:*

$$\text{KQ}(X) := X / \sim \tag{70.1}$$

sein Kolmogoroff-Quotient.

Es gibt dabei eine kanonische Quotientenabbildung $q_X: X \rightarrow \text{KQ}(X), x \mapsto [x]$.

Korollar 70.5. *Für einen Kolmogoroff-Raum X sind $\text{KQ}(X)$ und X homöomorph.*

Lemma 70.6. *Für topologische Räume X und Y induziert eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung:*

$$\text{KQ}(f): \text{KQ}(X) \rightarrow \text{KQ}(Y), [x] \mapsto [f(x)] \tag{70.2}$$

Beweis. Seien $x, x' \in X$ mit XXXX. XXXX. Mit der induzierten Abbildung $KQ(f)$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q_X \downarrow & & \downarrow q_Y \\ KQ(X) & \xrightarrow{KQ(f)} & KQ(Y) \end{array}$$

Da f (nach Voraussetzung) und q_Y (nach Definition (XXXX) der Quotiententopologie) stetig sind, ist auch $KQ(f) \circ q_X = q_Y \circ f$ nach Lemma (27.3) stetig. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie nach XXXX ist daher $KQ(f)$ stetig. \square

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $KQ \text{id}_X = \text{id}_{KQ(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $KQ(g \circ f) = KQ(g) \circ KQ(f)$.

Korollar 70.7. *Der Kolmogoroff-Quotient:*

$$KQ: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_0, X \mapsto KQ(X), f \mapsto KQ(f) \quad (70.3)$$

ist ein kovarianter Funktor.

Lemma 70.8. \mathbf{Top}_0 *ist eine reflektive Unterkategorie von* \mathbf{Top} . *Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor (Reflektor), nämlich den Kolmogoroff-Quotient:*

$$\mathbf{Top}_0 \xleftarrow{KQ} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX \square

Kapitel 71

Fréchet-Topologie (T_1 -Räume)

Definition 71.1 (Trennungsaxiom T_1). *Ein topologischer Raum X , für den je zwei verschiedene Punkte jeweils Umgebungen besitzen, in welcher der andere nicht liegt:*

$$\forall_{x,x' \in X} \exists_{U \in \mathcal{O}_X} \exists_{U' \in \mathcal{O}_X} : \quad (71.1)$$

erfüllt das T_1 -Trennungsaxiom

Definition 71.2 (Fréchet-Topologie). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, ist ein T_1 -Raum oder hat eine Fréchet-Topologie.*

Lemma 71.3. *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

- I.) *X hat Fréchet-Topologie (T_1 -Raum).*
- II.) *X ist ein symmetrischer Kolmogoroff-Raum (R_0 - und T_0 -Raum).*
- III.) *Einpunkte Teilmengen von X sind abgeschlossen.*
- IV.) *Endliche Teilmengen von X sind abgeschlossen.*

Beweis. IV.) \Rightarrow III.): Trivial. XXXX

□

Beispiel 71.4. *Der Sierpiński-Raum hat Fréchet-Topologie (T_1), ist aber kein Kolmogoroff-Raum (T_0).*

Lemma 71.5. *Existiert für topologische Räume X und Y , wobei X eine Fréchet-Topologie hat, eine bijektive und abgeschlossene Abbildung $f: X \rightarrow Y$, dann hat Y eine Fréchet-Topologie.*

Beweis. XXXX

□

Aus diesem Lemma folgt direkt:

Korollar 71.6. *Fréchet-Topologien bleiben unter Homöomorphismen erhalten.*

Kapitel 72

Hausdorff-Räume (T_2 -Räume)

Hausdorff-Räume gehören zu den wichtigsten Räumen der Topologie, da dies die topologischen Räume sind, die von metrischen Räumen induziert werden.

Definition 72.1 (Trennungsaxiom T_2). XXXX

Das Trennungsaxiom T_2 wird auch *Hausdorff-Eigenschaft* genannt.

Definition 72.2 (Hausdorff-Raum). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, wird Hausdorff-Raum genannt.*

In einem Hausdorff-Raum gibt es also für jeweils zwei Punkte stets disjunkte Umgebungen. Für einen metrischen Raum (M, d) und zwei Punkte $x, y \in M$ sind $B_{d(x,y)/2}(x)$ und $B_{d(x,y)/2}(y)$ offenbar disjunkte Umgebungen, woraus folgt:

Korollar 72.3. *Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.*

Lemma 72.4 (Diagonalkriterium). *Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale:*

$$\Delta_X := \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X \quad (72.1)$$

abgeschlossen ist.

Beweis. XXXX □

Da Diagonalkriterium für Hausdorff-Räume ermöglicht eine elegantere Formulierung vieler Beweise von Lemmata über Hausdorff-Räume.

Lemma 72.5. *Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y mit letzterem hausdorffsch ist ihr Graph:*

abgeschlossen.

Beweis. Nach Lemma (27.5) ist $f \times \text{id}_Y: X \times Y \rightarrow Y \times Y$ stetig. Nach Lemma (72.4) ist $\Delta_Y \subset Y \times Y$ abgeschlossen, womit

Lemma 72.6. *Für stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y mit letzterem hausdorffsch ist ihr Differenzkern:*

$$\ker(f, g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\} \subseteq X \quad (72.3)$$

abgeschlossen.

Beweis. Nach Lemma (XXXX) ist die Abbildung $(f, g): X \rightarrow Y \times Y$ stetig und nach Lemma (27.4) sind die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Nach Lemma (72.4) ist $\Delta_Y \subset Y \times Y$ abgeschlossen, womit $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y) \subseteq X$ abgeschlossen ist. \square

Korollar 72.7. *Für einen Hausdorff-Raum X und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow X$ ist $\text{Fix}(f) \subseteq X$ abgeschlossen.*

Lemma 72.8. *Unterräume von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.*

Beweis. Sei (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorff-Raum und $X \subseteq Y$ eine Teilmenge. Seien $x, x' \in X$, dann gibt es $U, U' \in \mathcal{O}_Y$ mit $x \in U$, $x' \in U'$ und $U \cap U' = \emptyset$. Nun sind $U \cap X, U' \cap X \in \mathcal{O}_X$ geeignete Umgebungen. \square

Lemma 72.9. *Beliebige Produkte von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.*

Beweis. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie an Hausdorff-Räumen und seien $x, x' \in \prod_{i \in I} X_i$, dann sind $\forall i \in I: \text{pr}_i(x), \text{pr}_i(x') \in X_i$. Da X_i hausdorffsch ist, gibt es disjunkte und offene Umgebungen $U_i, U'_i \subset X_i$ mit $x \in U_i$ und $x' \in U'_i$. XXXX \square

Lemma 72.10. *Beliebige Koprodukte von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.*

Beweis. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie an Hausdorff-Räumen und seien $x, x' \in \coprod_{i \in I} X_i$, dann gibt es $i, i' \in I$ mit $x \in X_i$ und $x' \in X_{i'}$. XXXX \square

Lemma 72.11. *Kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen.*

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Sei $x \in K^c$ beliebig. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K und da X hausdorffsch ist, existieren offene Umgebungen $(V_i)_{i \in I}$ von x mit $\forall i \in I: U_i \cap V_i = \emptyset$. Nun ist $\bigcap_{i \in I} V_i$ eine offene Umgebung von x mit:

$$K \cap \bigcap_{j \in I} V_j = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap \bigcap_{j \in I} V_j = \bigcup_{i \in I} \left(U_i \cap \bigcap_{j \in I} V_j \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \cap V_i = \emptyset \quad (72.4)$$

\square

Ein ähnliches Lemma gilt nicht für Folgenkompaktheit. Folgenkompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen müssen nicht unbedingt abgeschlossen sein.

Beispiel 72.12. *XXXX ist ein Hausdorff-Raum und XXXX eine folgenkompakte Teilmenge, die weder offen noch abgeschlossen ist.*

Lemma 72.13. *Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y gilt:*

- I.) *Ist f injektiv und stetig sowie Y hausdorffsch, dann ist X hausdorffsch.*
- II.) *Ist f bijektiv und offen sowie X hausdorffsch, dann ist Y hausdorffsch.*

Beweis. I.): Seien $x \neq x' \in X$, dann sind $f(x) \neq f(x') \in Y$, da f injektiv ist. Es gibt disjunkte offene Mengen $V, V' \subset Y$ mit $f(x) \in V$ und $f(x') \in V'$, da Y hausdorffsch ist. Nun sind $f^{-1}(V), f^{-1}(V') \subset X$ disjunkt, da Urbilder mit Schnitten vertauschen, und offen, da f stetig ist, mit $x \in f^{-1}(V)$ und $x' \in f^{-1}(V')$.

II.): Seien $y \neq y' \in Y$, dann gibt es $x \neq x' \in X$ mit $y = f(x)$ und $y' = f(x')$, da f bijektiv ist. Es gibt disjunkte offene Mengen $U, U' \subset X$ mit $x \in U$ und $x' \in U'$, da X hausdorffsch ist. Nun sind $f(U), f(U') \subset Y$ disjunkt, da f injektiv ist, und offen, da f offen ist, mit $y = f(x) \in f(U)$ und $y' = f(x') \in f(U')$. \square

Beispiel 72.14. Die umgekehrten Schlüsse in Lemma (XXXX) stimmen selbst für bijektive Abbildungen nicht. Sei X eine mindestens zweielementige Menge, dann gilt:

I.) $\text{id}_X: (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (X, \mathcal{P}(X))$ ist bijektiv und stetig mit hausdorffischem Quellraum, aber nicht hausdorffischem Bildraum.

II.) $\text{id}_X: (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (X, \mathcal{P}(X))$ ist bijektiv und offen mit hausdorffischem Bildraum, aber nicht hausdorffischem Quellraum.

Lemma 72.15. Existiert für topologische Räume X und Y mit Y hausdorffsch eine injektive und stetige Abbildung $f: X \hookrightarrow Y$, dann ist X hausdorffsch.

Beweis. Seien $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, dann ist $f(x) \neq f(x')$ und es gibt $V, V' \in \mathcal{O}_Y$ mit $f(x) \in V$, $f(x') \in V'$ und $V \cap V' = \emptyset$. Dann ist $f^{-1}(V), f^{-1}(V') \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in f^{-1}(V)$, $x' \in f^{-1}(V')$ und $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') = f^{-1}(V \cap V') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. \square

Beweis. $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ ist nach Lemma (72.4) abgeschlossen. $f \times f: X \times X \hookrightarrow Y \times Y$ ist nach Lemma (27.5) stetig und nach Lemma (XXXX) ist $\Delta_X = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen. \square

Aus diesem Lemma folgt direkt:

Korollar 72.16. Hausdorff-Räume bleiben unter Homöomorphismen erhalten.

Beispiel 72.17. Die kofinite Topologie auf einer unendlichen Menge ist hausdorffsch (T_2), aber keine Fréchet-Topologie (T_1).

Lemma 72.18. Die Ordnungstopologie auf einer total geordnete Menge ist hausdorffsch.

Nach Lemma (75.4) ist sie auch normal.

Beweis. \square

72.1 Satz von Tamano

Satz 72.19 (Satz von Tamano). Für einen Hausdorff-Raum X sind äquivalent:

I.) X ist parakompakt

II.) $X \times \beta X$ ist normal

III.) Für einen beliebigen kompakten Hausdorff-Raum K ist $X \times K$ normal

Beweis. XXXX \square

72.2 Irreduzible Räume

Definition 72.20 (Irreduzibler Raum). *Ein topologischer Raum, der sich nicht*

Definition 72.21 (Generischer Punkte). *Ein Punkt $x \in X$ mit $\overline{\{x\}} = X$ wird generisch genannt.*

Definition 72.22 (Nüchterner Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede irreduzible Teilmenge einen nüchternen Punkt enthält, wird nüchtern genannt.*

72.3 Krulldimension

Definition 72.23 (Krulldimension). *Für einen topologischen Raum X ist das Supremum aller n , für die Reihen $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n \subseteq X$ von irreduziblen Teilmengen existieren, seine Krulldimension, notiert als $\dim(X)$.*

Für eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge $Y \subset X$ ist das Supremum aller n , für die Reihen $Y = X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n \subseteq X$ von irreduziblen Teilmengen existieren, seine *Kodimension*, notiert als $\text{codim}_X(Y)$.

72.4 Hausdorffifizierung

Mithilfe von Äquivalenzrelationen können Punkte eines topologischen Raumes miteinander identifiziert werden und durch die Quotiententopologie zu einem Punkt vereinigt werden. Wird die Äquivalenzrelation der XXXX aus der die Definition der Hausdorff-Eigenschaft dafür verwendet, ergibt sich eine kanonische Möglichkeit zur Erzeugung eines Hausdorff-Raumes aus einem beliebigen topologischen Raum.

Definition 72.24 (Hausdorff-Quotient). *Für einen topologischen Raum X ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation der XXXX:*

$$\text{HQ}(X) := X / \sim \quad (72.5)$$

sein Hausdorff-Quotient.

Es gibt dabei eine kanonische Quotientenabbildung $q_X: X \rightarrow \text{HQ}(X), x \mapsto [x]$.

Korollar 72.25. *Für einen Hausdorff-Raum X sind $\text{HQ}(X)$ und X homöomorph.*

Lemma 72.26. *Für topologische Räume X und Y induziert eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung:*

$$\text{HQ}(f): \text{HQ}(X) \rightarrow \text{HQ}(Y), [x] \mapsto [f(x)] \quad (72.6)$$

Beweis. Seien $x, x' \in X$ mit XXXX. XXXX. Mit der induzierten Abbildung $\text{HQ}(f)$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q_X \downarrow & & q_Y \downarrow \\ \text{HQ}(X) & \xrightarrow{\text{HQ}(f)} & \text{HQ}(Y) \end{array}$$

Da f (nach Voraussetzung) und q_Y (nach Definition (XXXX) der Quotiententopologie) stetig sind, ist auch $HQ(f) \circ q_X = q_Y \circ f$ nach Lemma (27.3) stetig. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie nach XXXX ist daher $HQ(f)$ stetig. \square

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $HQ \text{id}_X = \text{id}_{HQ(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $HQ(g \circ f) = HQ(g) \circ HQ(f)$.

Korollar 72.27. *Der Hausdorff-Quotient:*

$$HQ: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_2, X \mapsto HQ(X), f \mapsto HQ(f) \quad (72.7)$$

ist ein kovarianter Funktor.

Satz 72.28 (Hausdorffifizierung). **Haus** ist eine reflektive Unterkategorie von **Top**. Die kanonische Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor (Reflektor), nämlich die Hausdorffifizierung:

$$\mathbf{Haus} \begin{array}{c} \xleftarrow{HQ} \\ \perp \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX \square

Da **Haus** eine volle und reflektive Unterkategorie der nach Lemma (XXXX) kovollständigen Kategorie **Top** ist, folgt:

Korollar 72.29. **Haus** ist kovollständig, enthält also alle kleinen Kolimiten.

72.5 Lokale Hausdorff-Räume

Definition 72.30 (Lokaler Hausdorff-Raum). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine Umgebung hat, welche mit der Teilraumtopologie ein Hausdorff-Raum ist, wird lokaler Hausdorff-Raum genannt.*

Da Unterräume von Hausdorff-Räumen nach Lemma (72.8) hausdorffsch sind, folgt direkt:

Korollar 72.31. *Hausdorff-Räume sind lokal hausdorffsch.*

Beispiel 72.32. *Die Linie mit zwei Ursprüngen ist lokal hausdorffsch, aber nicht hausdorffsch.*

Kapitel 73

Kontinua

Definition 73.1 (Kontinuum). *Ein zweitabzählbarer zusammenhängender kompakter Hausdorff-Raum wird Kontinuum genannt.*

73.1 Satz von Hahn–Mazurkiewicz

Satz 73.2 (Satz von Hahn–Mazurkiewicz). *Ein Kontinuum ist genau dann Quotientenraum des Einheitsintervalls, wenn es lokal zusammenhängend ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 74

Reguläre Räume

Definition 74.1 (Regulärer Raum). XXXX

Lemma 74.2. *Unterräume von regulären Räumen sind regulär.*

Beweis. XXXX □

Lemma 74.3. *Beliebige Produkte von regulären Räumen sind regulär.*

Beweis. XXXX □

Lemma 74.4. *Jeder reguläre Raum ist symmetrisch.*

Beweis. Seien X ein regulärer topologischer Raum und $x, y \in X$ zwei topologisch unterscheidbare Punkte. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U \ni x$ eine offene Teilmenge mit $y \notin U$, womit $X \setminus U \ni y$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $x \notin X \setminus U$ ist. Da X regulär ist, gibt es Umgebungen $V \ni x$ und $W \supseteq X \setminus U \ni y$, womit x und y getrennt sind, womit X symmetrisch ist. □

Die Umkehrung von Lemma (74.4) gilt nicht unbedingt, jedoch unter Hinzunahme einer weiteren Bedingung:

Lemma 74.5. *Jeder symmetrische normale Raum ist regulär.*

Beweis. Seien X ein kompakter Hausdorff-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nach Satz (47.2) ist A kompakt. Da X hausdorffsch ist, gibt es für jeden Punkt $a \in A$ disjunkte Umgebungen $U_{x,a}$ und U_a , wodurch $(U_{x,a})_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A ist. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $(U_{x,a})_{a \in A' \subset A}$. □

Lemma 74.6. *Parakompakte Hausdorff-Räume sind regulär.*

Beweis. Seien X ein parakompakter Hausdorff-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nach Lemma (51.5) ist A parakompakt. Da X hausdorffsch ist, gibt es für jeden Punkt $a \in A$ disjunkte Umgebungen $U_{x,a}$ und U_a , wodurch $(U_{x,a})_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A ist. Da A parakompakt ist, XXXX □

Lemma 74.7. *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind regulär.*

Es gilt nach Lemma (86.2) sogar, dass sie vollständig regulär sind.

Beweis. XXXX □

Beweis. Seien X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nach Lemma (54.3) ist A lokalkompakt. XXXX \square

Die Rückrichtung von Korollar (62.2), dass kompakte Räume H -abgeschlossen sind, gilt mit der zusätzlichen Bedingung der Regularität:

Lemma 74.8. *Ein H -abgeschlossener regulärer Raum ist kompakt.*

Beweis. XXXX \square

Lemma 74.9. *Zweitabzählbare reguläre Räume sind parakompakt.*

Vergleiche mit Lemma (54.12), nach dem zweitabzählbare lokalkompakte Räume stets σ -kompakt sind.

Beweis. XXXX \square

74.1 Lokal reguläre Räume

Definition 74.10 (Lokal regulärer Raum). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine Umgebung hat, welche mit der Teilraumtopologie regulär ist, wird lokal regulär genannt.*

Da Unterräume von regulären Räumen nach Lemma (74.2) regulär sind, folgt direkt:

Korollar 74.11. *Reguläre Räume sind lokal regulär.*

XXXX

Korollar 74.12. *Lokal reguläre T_1 -Räume sind lokal hausdorffsch.*

Kapitel 75

Normale Räume (T_4 -Räume)

Definition 75.1 (Trennungsaxiom T_4). XXXX

Definition 75.2 (Normaler Raum). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_4 erfüllt, wird normal genannt.*

Beispiel 75.3. \mathbb{R} ist mit der von der Betragsnorm induzierten Topologie normal.

Lemma 75.4. *Die Ordnungstopologie auf einer total geordnete Menge ist normal.*

Nach Lemma (72.18) ist sie auch hausdorffsch.

Beweis. XXXX □

Definition 75.5 (Binormaler Raum). *Ein normaler und abzählbar parakompakter topologischer Raum wird binormal genannt.*

Lemma 75.6. *In einem zweitabzählbaren normalen Raum ist eine Teilmenge genau dann offen, wenn sie eine F_σ -Menge ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 75.7. *In einem zweitabzählbaren normalen Raum ist eine Teilmenge genau dann abgeschlossen, wenn sie die Nullstellenmenge einer stetigen Abbildung in die reellen Zahlen ist.*

Beweis. XXXX □

75.1 Lemma von Urysohn

Lemma 75.8 (Lemma von Urysohn). *Für einen normalen topologischen Raum X und disjunkte abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt es eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.*

Beweis. XXXX □

75.2 Fortsetzungssatz von Tietze

Satz 75.9 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn sich jede stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ auf jeder abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ fortsetzen lässt, also eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$ existiert.*

Der Fortsetzungssatz von Tietze wird auch *Satz von Tietze–Urysohn* genannt.

Beweis. XXXX □

Lemma 75.10. *Für eine surjektive und abgeschlossene Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y mit X normal ist Y normal.*

Beweis. Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen, dann ist $f^{-1}(B) \subseteq X$ nach Lemma (27.4) abgeschlossen, da f stetig ist. Sei $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $h = g \circ f|_{f^{-1}(B)}: f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nach dem Fortsetzungssatz (75.9) von Tietze existiert eine stetige Fortsetzung $H: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H|_{f^{-1}(B)} = h$, da X normal ist. □

75.3 Interpolationssatz von Katětov

Satz 75.11 (Interpolationssatz von Katětov). XXXX

Beweis. XXXX □

75.4 Dieudonné-Theorem

Satz 75.12. *Kompakte Hausdorff-Räume sind normal.*

Beweis. Seien X ein kompakter Hausdorff-Raum und $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, also nach Satz (47.2) kompakt. Da X hausdorffsch ist, gibt es für jedes $a \in A$ und $b \in B$ offene und disjunkte Umgebungen $U_{a,b} \in \mathcal{U}(a)$ und $V_{a,b} \in \mathcal{U}(b)$, womit $(U_{a,b})_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A und $(V_{a,b})_{b \in B}$ eine offene Überdeckung von A ist. XXXX □

Satz (75.12) kann abgeschwächt werden zu:

Theorem 75.13 (Dieudonné-Theorem). *Parakompakte Hausdorff-Räume sind normal.*

Beweis. Seien X ein parakompakter Hausdorff-Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Nach Lemma (74.6) ist X regulär. Nach Lemma (51.5) sind A und B parakompakt. XXXX □

Beispiel 75.14. *Die lange Gerade ist normal, aber nicht parakompakt.*

75.5 Lokal normale Räume

Definition 75.15 (Lokal normaler Raum). *Ein topologischer Raum, für den jeder Punkt eine Umgebung hat, welche mit der Teilraumtopologie normal ist, wird lokal normal genannt.*

Da Unterräume von normalen Räumen nach Lemma (??) normal sind, folgt direkt:

Korollar 75.16. *Normale Räume sind lokal normal.*

XXXX

Korollar 75.17. *Lokal normale T_1 -Räume sind lokal regulär.*

XXXX

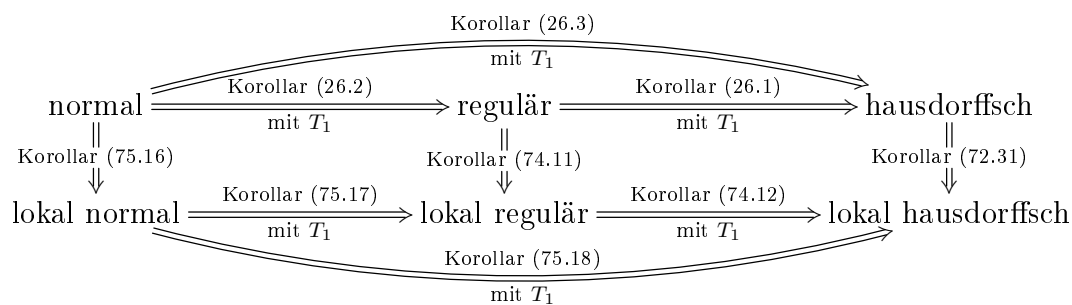
Korollar 75.18. *Lokal normale T_1 -Räume sind lokal hausdorffsch.*

XXXX

Lemma 75.19. *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind lokal normal.*

Beweis. XXXX

□



Teil X

Topologische Dimensionen

Kapitel 76

Lebesguesche Überdeckungsdimension

Lemma 76.1. *Ist X normal, dann ist $\dim(\beta X) = \dim(X)$.*

Dieses Lemma stammt von J. R. Isbell. Vergleiche mit Lemma (76.1) für eine analoge Aussage mit der großen induktiven Dimension.

Beweis. XXXX □

Lemma 76.2. *Für metrisierbare topologische Räume X, Y oder X parakompakt und Y kompakt ist:*

$$\dim(X \times Y) \leq \dim(X) + \dim(Y) \tag{76.1}$$

Vergleiche mit den Lemma (77.2) und (77.6) für analoge Aussagen mit der kleinen und großen induktiven Dimension.

Beweis. XXXX □

Satz 76.3 (Teilmengensatz der Überdeckungsdimension). *Für einen normalen Raum X und einen Teilraum $Y \subseteq X$ ist:*

$$\dim(Y) \leq \dim(X). \tag{76.2}$$

Vergleiche mit Satz (77.8) für eine analoge Aussage mit der großen induktiven Dimension.

Beweis. XXXX □

Satz 76.4 (Einbettungssatz von Menger–Nöbling). *Jeder n -dimensionale kompakte metrisierbare Raum lässt sich homöomorph in den \mathbb{R}^{2n+1} einbetten.*

Beweis. □

Satz 76.5 (Hurewicz-Formel). *Für X normal, Y metrisierbar und $f: X \rightarrow Y$ stetig, abgeschlossen und surjektiv, dann ist:*

$$\dim(X) \leq \dim(Y) + \sup_{y \in Y} \dim(f^{-1}(y)). \tag{76.3}$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 77

Induktive Dimensionen

77.1 Kleine induktive Dimension

Definition 77.1 (Kleine induktive Dimension). I.) $\text{ind}(\emptyset) = -1$

II.) $\text{ind}(X) \leq n$, falls es zu jedem $x \in X$ und jeder offenen Umgebung $x \in U \subseteq X$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq V$ mit $\bar{U} \subseteq V$ gibt, für die $\text{ind}(\partial V) \leq n - 1$.

Lemma 77.2. Für einen perfekten Raum X und einen metrisierbaren Raum Y ist:

$$\text{ind}(X \times Y) \leq \text{ind}(X) + \text{ind}(Y). \quad (77.1)$$

Vergleiche mit den Lemmata (76.2) und (77.6) für analoge Aussagen mit der Lebesgueschen Überdeckungsdimension und der großen induktiven Dimension.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.3. Ein nulldimensionaler Hausdorff-Raum ist total unzusammenhängend.

Beweis. Siehe MSE, Frage 761295. □

Lemma 77.4. Ein total unzusammenhängend und lokalkompakter Hausdorff-Raum ist nulldimensional.

Beweis. Siehe [8], Proposition 3.1.7. auf Seite 136. □

77.2 Große induktive Dimension

Satz 77.5 (Summensatz). Für einen vollständigen normalen topologischen Raum X und eine Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, ist:

$$\text{Ind}(X) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ind}(Y_n) \quad (77.2)$$

Der Summensatz stammt von Clifford Dowker.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.6. *Für nichtleere reguläre Hausdorff-Räume X und Y ist:*

$$\text{Ind}(X \times Y) \leq \text{Ind}(X) + \text{Ind}(Y). \quad (77.3)$$

Vergleiche mit den Lemmata (76.2) und (77.2) für analoge Aussagen mit der Lebesgueschen Überdeckungsdimension und der kleinen induktiven Dimension.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.7. *Ist X normal, dann ist $\text{Ind}(\beta X) = \text{Ind}(X)$.*

Dieses Lemma stammt von N. Wendenisow. Vergleiche mit Lemma (76.1) für eine analoge Aussage mit der Lebesgueschen Überdeckungsdimension. Eine analoge Aussage für die kleine induktive Dimension ist falsch.

Beweis. XXXX □

Satz 77.8 (Teilmengensatz der großen induktiven Dimension). *Für einen normalen Raum X und einen Teilraum $Y \subseteq X$ ist:*

$$\text{Ind}(Y) \leq \text{Ind}(X). \quad (77.4)$$

Vergleiche mit Satz (76.3) für eine analoge Aussage mit der Lebesgueschen Überdeckungsdimension.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.9. *Für einen metrisierbaren topologischen Raum X ist:*

$$\text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X) \leq \dim(X). \quad (77.5)$$

Dieses Lemma stammt von Miroslav Katětov.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.10. *Für einen kompakten Hausdorff-Raum X ist:*

$$\dim(X) \leq \text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X). \quad (77.6)$$

Dieses Lemma stammt von Paul Alexandroff.

Beweis. XXXX □

Lemma 77.11. *Für einen metrisierbaren separablen Raum X ist:*

$$\text{ind}(X) = \text{Ind}(X) = \dim(X). \quad (77.7)$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 78

Rényi-Dimension

Definition 78.1 (Rényi-Dimension).

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i \mu(B_i)^q}{(1-q) \ln(\varepsilon)} \quad (78.1)$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu(B_i)^q \ln \mu(B_i)}{-\ln(\varepsilon) \sum_i \mu(B_i)^q} \quad (78.2)$$

Die Rényi-Dimension für $q = 0$ ist die fraktale Dimension, für $q = 1$ wird sie *Informationsdimension* und für $q = 2$ *Korrelationsdimension* genannt.

Teil XI
Anhang

Teil XII

Notizen

Kapitel 79

Conn- und PConn-Funktor

$$\text{Conn}(Y, \mathcal{O}_Y) := (Y, \bigcup_{\substack{\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y) \\ \mathcal{U} \text{ zsmh.}}} \mathcal{U}) \quad (79.1)$$

$$\text{PConn}(Y, \mathcal{O}_Y) := (Y, \bigcup_{\substack{\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y) \\ \mathcal{U} \text{ wegzsmh.}}} \mathcal{U}) \quad (79.2)$$

Lemma 79.1. Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ auch als (auf der zugrundeliegenden Menge gleichen) Abbildung $\text{Conn}(f): \text{Conn}(X) \rightarrow \text{Conn}(Y)$ und $\text{PConn}(f): \text{PConn}(X) \rightarrow \text{PConn}(Y)$ stetig.

Beweis. XXXX □

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\text{Conn id}_X = \text{id}_{\text{Conn}(X)}$ sowie $\text{PConn id}_X = \text{id}_{\text{PConn}(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\text{Conn}(g \circ f) = \text{Conn}(g) \circ \text{Conn}(f)$ sowie $\text{PConn}(g \circ f) = \text{PConn}(g) \circ \text{PConn}(f)$.

Korollar 79.2. Conn und PConn sind kovariante Funktoren:

$$\text{Conn}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Conn} \quad (79.3)$$

$$\text{PConn}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{PConn}. \quad (79.4)$$

Lemma 79.3. Für topologische Räume X und Y mit X zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ auch als (auf der zugrundeliegenden Menge gleichen) Abbildung $f: X \rightarrow \text{Conn}(Y)$ bzw. $f: X \rightarrow \text{PConn}(Y)$ stetig.

Beweis. XXXX □

Lemma 79.4. \mathbf{Conn} ist eine koreflektive Unterkategorie von \mathbf{Top} . Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor:

$$\mathbf{Conn} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \\ \text{Conn} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Lemma 79.5. \mathbf{PConn} ist eine koreflektive Unterkategorie von \mathbf{Top} . Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor:

$$\mathbf{PConn} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \\ \text{PConn} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 80

LocConn- und LocPConn-Funktor

$$\text{LocConn}(Y, \mathcal{O}_Y) := (Y, \bigcup_{\substack{\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y) \\ \mathcal{U} \text{ lokal zsmh.}}} \mathcal{U}) \quad (80.1)$$

$$\text{LocPConn}(Y, \mathcal{O}_Y) := (Y, \bigcup_{\substack{\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y) \\ \mathcal{U} \text{ lokal wegzsmh.}}} \mathcal{U}) \quad (80.2)$$

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\text{LocConn id}_X = \text{id}_{\text{LocConn}(X)}$ sowie $\text{LocPConn id}_X = \text{id}_{\text{LocPConn}(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\text{LocConn}(g \circ f) = \text{LocConn}(g) \circ \text{LocConn}(f)$ sowie $\text{LocPConn}(g \circ f) = \text{LocPConn}(g) \circ \text{LocPConn}(f)$.

Korollar 80.1. *LocConn und LocPConn:*

$$\text{LocConn}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{LocConn}, X \mapsto \text{LocConn}(X), f \mapsto \text{LocConn}(f) \quad (80.3)$$

$$\text{LocPConn}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{LocPConn}, X \mapsto \text{LocPConn}(X), f \mapsto \text{LocPConn}(f) \quad (80.4)$$

sind kovariante Funktoren.

Lemma 80.2. *LocConn ist eine koreflektive Unterkategorie von Top. Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor:*

$$\mathbf{LocConn} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \\ \mathbf{LocConn} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Lemma 80.3. *LocPConn ist eine koreflektive Unterkategorie von Top. Die kanonische Inklusion hat einen rechtsadjungierten Funktor:*

$$\mathbf{LocPConn} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \\ \mathbf{LocPConn} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. XXXX □

Kapitel 81

Wallmann–Shanin-Kompaktifizierung

Lemma 81.1. *Für einen normalen Raum sind seine Stone–Čech- und Wallman–Shanin-Kompaktifizierung homöomorph.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 82

Symmetrischer Raum (R_0 -Raum)

Definition 82.1 (Symmetrischer Raum). *Ein topologischer Raum X , für den:*

$$\forall_{x,y \in X} : x \notin \overline{\{y\}} \wedge y \notin \overline{\{x\}} \quad (82.1)$$

wird symmetrischer Raum genannt.

Kapitel 83

Präregulärer Raum (R_1 -Raum)

Definition 83.1 (Trennungsaxiom R_1).

Definition 83.2 (Präregulärer Raum). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom R_1 erfüllt, wird präregulärer Raum (oder R_1 -Raum) genannt.*

Kapitel 84

Urysohn-Raum

Definition 84.1 (Trennungsaxiom T_{212}).

Das Trennungsaxiom T_{212} impliziert T_2 .

Definition 84.2 (Urysohn-Raum). *Ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom T_{212} erfüllt, wird Urysohn-Raum genannt.*

Ein Urysohn-Raum ist stets hausdorffsch.

Kapitel 85

Regulärer Hausdorff-Raum (T_3 -Raum)

Definition 85.1 (Regulärer Hausdorff-Raum). *Ein regulärer Kolmogoroff-Raum wird regulär hausdorffsch genannt.*

Die Namensgebung kommt daher, dass ein regulärer Kolmogoroff-Raum stets ein Urysohn- und damit stets ein Hausdorff-Raum ist.

Lemma 85.2. *Ein topologischer Raum ist genau dann regulär, wenn sein Kolmogorov-Quotient ein regulärer Hausdorff-Raum ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 86

Vollständiger regulärer Raum

Korollar 86.1. *Vollständig reguläre Räume sind regulär.*

Lemma 86.2. *Lokalkompakte Hausdorff-Räume sind vollständig regulär.*

Das ist mit Korollar (86.1) eine Verallgemeinerung von Lemma (74.7).

Beweis. XXXX

□

Lemma 86.3. *Normale Hausdorff-Räume sind vollständig regulär.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 87

Tychonoff-Raum (T_{312} -Raum)

Definition 87.1 (Tychonoff-Raum). *Ein vollständig regulärer Kolmogoroff-Raum wird Tychonoff-Raum (auch vollständig regulärer hausdorffsch oder T_{312} -Raum) genannt.*

Kapitel 88

Vollständiger normaler Raum

Lemma 88.1. *Vollständig normale Räume bleiben unter Homöomorphismen erhalten.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume mit X vollständig normal und $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. XXXX \square

Kapitel 89

Vollständiger normaler Hausdorff-Raum (T_5 -Raum)

Definition 89.1 (Vollständig normaler hausdorffscher Raum). *Ein vollständig normaler Raum mit Fréchet-Topologie (Trennungsaxiom T_1) wird vollständig normaler Hausdorff-Raum genannt.*

Aus Lemma (88.1) und Korollar (71.6) folgt:

Korollar 89.2. *Vollständig normale Hausdorff-Räume bleiben unter Homöomorphismen erhalten.*

Kapitel 90

Perfekt normaler Raum

Lemma 90.1. *Perfekt normale Räume bleiben unter Homöomorphismen erhalten.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume mit X perfekt normal und $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. XXXX □

Kapitel 91

Perfekt normaler Hausdorff-Raum (perfekter T_4 -Raum)

Definition 91.1 (Vollständig normaler hausdorffscher Raum). *Ein perfekt normaler Raum mit Fréchet-Topologie (Trennungsaxiom T_1) wird perfekt normaler Hausdorff-Raum genannt.*

Aus Lemma (90.1) und Korollar (71.6) folgt:

Korollar 91.2. *Perfekt normale Hausdorff-Räume bleiben unter Homöomorphismen erhalten.*

Kapitel 92

Spezielle topologische Räume

92.1 Lange Linie

XXXX

92.2 Topologischer Kamm

XXXX

92.3 Hawaiianische Ohrringe

XXXX

92.4 Warschauer Sinuskurve

XXXX

92.5 Warschauer Kreis

XXXX

Literaturverzeichnis

- [1] J. Arthur Seebach Jr. und Lynn Arthur Steen, *Counterexamples in Topology*
- [2] Hart, K. P.; Nagata, J.; Vaughan, J. E. (Eds.) (2004). *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier.
- [3] Ryszard Engelking, *Outline of General Topology*
- [4] M. Ganster, I. L. Reilly; *Locally closed sets and LC-continuous functions*, <https://www.hindawi.com/journals/ijmms/1989/758376>
- [5] Paul Alexandroff: *Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Bd. 178, 1924, S. 185–187.
- [6] Felix Hausdorff: *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen*, Fundamenta Mathematicae. Bd. 6, 1924, S. 146–148.
- [7] Stefan Mazurkiewicz: *Über Borelsche Mengen*, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A: Sciences Mathématiques. 1916, ZDB-ID 761846-3, S. 490–494.
- [8] Alexander Arhangel'skii, Mikhail Tkachenko; *Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra*
- [9] F. Cagliari, S. Mantovani, Enrico Vitale, *Regularity of the category of Kelley spaces*, Applied Categorical Structures volume 3, pages 357–361 (1995) (doi:10.1007/BF00872904, <https://www.dm.unibo.it/~cagliari/articoli/RegularKelley.pdf>)
- [10] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [11] Tadayuki Haraguchi, Kazuhisa Shimakawa, *A model structure on the category of diffeological spaces* (2013), <https://arxiv.org/abs/1311.5668>
- [12] Tadayuki Haraguchi, Kazuhisa Shimakawa, *A model structure on the category of diffeological spaces, I* (2020), <https://arxiv.org/abs/2011.12842>
- [13] Hiroshi Kihara, *Model category of diffeological spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, (2018), 1-40, <https://arxiv.org/abs/1605.06794>