

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

Version 1 vom 15. Januar 2025

SAMUEL ADRIAN ANTZ

Veröffentlicht und frei verfügbar auf:

<https://www.samueladrianantz.com/de/scripts/algtopo-de-1.pdf>

<https://gitlab.com/samueladrianantz/public/tree/main/algtopo-de-1.pdf>

INHALTSVERZEICHNIS

ÜBER DIE ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

Die *Algebraische Topologie* beschäftigt sich mit Methoden zur Bestimmung, ob topologische Räume homöomorph oder homotopieäquivalent sind. Dafür werden Abbildungen konstruiert, die einen topologischen Raum auf eine algebraische Struktur abbilden, wie etwa eine Gruppe. Statt der Homöomorphie der topologischen Räume kann nun stattdessen einfach die Isomorphie der ihnen entsprechenden Gruppen untersucht werden. Die Erhaltung der Struktur bei der Abbildung bedeutet dabei, dass die Abbildung kategorientheoretisch ein Funktor ist. Beispiele sind dabei die Fundamentalgruppe oder die höheren abelschen Homotopiegruppen:

$$(1) \quad \pi_1: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

$$(2) \quad \pi_n: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Ab}$$

- **Homotopietheorie** beschäftigt sich mit der Untersuchung von stetigen Abbildungen bis auf stetige Überführung ineinander sowie spezieller mit der Untersuchung der Eigenschaften eines topologischen Raumes durch dessen Kohomotopiemengen. Beschrieben wird die Homotopietheorie in Teil ?? von Kapitel (XXXX) bis Kapitel (XXXX).
- **Kohomotopietheorie** beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften eines topologischen Raumes durch dessen Kohomotopiemengen. Beschrieben wird die Kohomotopietheorie in Teil ?? von Kapitel (XXXX) bis Kapitel (XXXX).
- **Homologietheorie** beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften eines topologischen Raumes durch dessen Homologiegruppen. Beschrieben wird die Homologietheorie in Teil ?? von Kapitel (XXXX) bis Kapitel (XXXX).
- **Kohomologietheorie** beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften eines topologischen Raumes durch dessen Kohomologiegruppen. Beschrieben wird die Kohomologietheorie in Teil ?? von Kapitel (XXXX) bis Kapitel (XXXX).

TEIL 1. TOPOLOGISCHE KONSTRUKTIONEN

1. KEGEL

Definition 1.1 (Kegel). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(3) \quad CX := (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$$

sein Kegel. [?, p. 8]

Anschaulich wird der topologische Raum X durch das Kreuzprodukt mit dem Einheitsintervall $[0, 1]$ zu einem Zylinder, dessen einer Randkreis zu einem Punkt zusammengezogen wird. Der Kegel CX wird mit der Produkt- und Quotiententopologie wieder zu einem topologischen Raum.

Beispiel 1.2. *Für den einpunktigen Raum $\{*\}$ ist $C\{*\} \cong [0, 1]$.*

Lemma 1.3. *Es ist $CD^n \approx D^{n+1}$.*

Beweis. XXXX □

Lemma 1.4. *Es ist $CS^n \approx D^{n+1}$.*

Beweis. XXXX □

Korollar 1.5. *Für einen kompakten Hausdorff-Raum X ist mit Lemma (XXXX):*

$$(4) \quad CX = [(X \times [0, 1]) \setminus (X \times \{1\})]^* = [X \times [0; 1]]^*$$

Lemma 1.6. *Der Kegel ist zusammenziehbar.*

Beweis. Sei X ein topologischer Raum. Die (stetige) Quotientenabbildung $h: X \times [0, 1] \twoheadrightarrow CX$ ist eine Homotopie zwischen $h(-, 0) = \text{id}_X$ und $h(-, 1) = \text{const}$.

$$(5) \quad h: [0, 1] \times CX \rightarrow CX, (s, [(x, t)]) \mapsto [(x, 1 - s(1 - t))]$$

mit $h(0, -) = \text{id}_{CX}$ und $h(1, -) = \text{const}$. □

Für einen topologischen Raum X sind die Räume $CX \times [0, 1]$ und die Einhängung $C(X \times [0, 1])$ beide Quotientenräume des Raumes $X \times [0, 1] \times [0, 1]$. Die Äquivalenzrelation des ersten Raumes (wo $X \times [0, 1] \times \{1\}$ entlang von X kollabiert wird) ist jedoch schwächer als die des zweiten Raumes (wo $X \times [0, 1] \times \{1\}$ komplett kollabiert wird), woraus sich eine kanonische stetige Abbildung:

$$(6) \quad p: CX \times [0, 1] \rightarrow C(X \times [0, 1]), [(x, s)], t \mapsto [(x, s, t)]$$

ergibt.

1.1. INDUZIERTE KEGELABBILDUNG

Lemma 1.7 (Induzierte Kegelabbildung). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist die induzierte Kegelabbildung:*

$$(7) \quad Cf: CX \rightarrow CY, Cf([(x, t)]) := [(f(x), t)]$$

stetig, wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{Cf} & CY \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. (Mit Kategorientheorie.) Die induzierte Kegelabbildung wird durch die universelle Eigenschaft des Kofaserproduktes induziert: □

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{!} & \{*\} \\ \downarrow (\text{id}, 1) & & \downarrow \\ X \times [0, 1] & \twoheadrightarrow & CX \\ \downarrow f \times \text{id} & & \downarrow Cf \\ Y \times [0, 1] & \twoheadrightarrow & CY \end{array}$$

Korollar 1.8. *Die induzierte Kegelabbildung einer surjektiven (stetigen) Abbildung ist surjektiv.*

Beispiel 1.9. *Für einen topologischen Raum X ist die induzierte Kegelabbildung der terminalen Abbildung $X \xrightarrow{!} \{*\}$ mit Beispiel (1.2) gegeben durch:*

$$(8) \quad CX \xrightarrow{C!} [0, 1], [(x, t)] \mapsto t.$$

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $C \text{id}_X = \text{id}_{CX}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ sowie $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $C(g \circ f) = Cg \circ Cf$.

Korollar 1.10. *Der Kegel ist ein kovarianter Funktor:*

$$(9) \quad C: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}, X \mapsto CX, f \mapsto Cf.$$

1.2. VERBINDUNG MIT HOMOTOPIETHEORIE

Lemma 1.11. *Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist genau dann nullhomotop, wenn sie über $i: X \hookrightarrow CX, x \mapsto [(x, 0)]$ faktorisiert.*

Beweis. \Leftarrow : XXXX \Rightarrow : XXXX □

Lemma 1.12. *Für topologische Räume X und Y sowie homotope stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ sind die stetigen Abbildungen $Cf, Cg: CX \rightarrow CY$ homotop.*

Beweis. Sei $H: X \times [0; 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , also eine stetige Abbildung mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$. Mit der kanonischen Projektion $p: CX \times [0, 1] \rightarrow CX \times [0, 1]$ aus Gleichung (16) ergibt sich eine wohldefinierte und stetige Homotopie durch:

$$(10) \quad \tilde{H} = CH \circ p: CX \times [0, 1] \rightarrow CY, [(x, s), t] \mapsto [(H(x, t), s)]$$

mit welcher das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{H} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ CX \times [0, 1] & \xrightarrow{p} & C(X \times [0, 1]) & \xrightarrow{CH} & CY \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & & & Y \end{array}$$

kommutiert. Für diese Homotopie gilt mit der induzierten Kegelabbildung nach Lemma (??):

$$(11) \quad \tilde{H}(-, 0): CX \rightarrow CY, [(x, s)] \mapsto [(H(x, 0), s)] = [(f(x), s)] = Cf([(x, s)])$$

$$(12) \quad \tilde{H}(-, 1): CX \rightarrow CY, [(x, s)] \mapsto [(H(x, 1), s)] = [(g(x), s)] = Cg([(x, s)]),$$

daher verbindet diese $\tilde{H}(-, 0) = Cf$ und $\tilde{H}(-, 1) = Cg$. □

1.3. UNENDLICHER KEGEL

Für einen topologischen Raum X gibt es eine kanonische Einbettung $i: X \hookrightarrow CX, x \mapsto [(x, 0)]$ in dessen Kegel CX , wobei sich durch die induzierten Kegelabbildungen eine Kette an stetigen Abbildungen ergibt, deren Kolimes sich bilden lässt:

$$X \xrightarrow{i} CX \xrightarrow{Ci} C^2X \xrightarrow{C^2i} \dots \longrightarrow C^\infty X$$

Definition 1.13 (Unendlicher Kegel). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(13) \quad C^\infty X := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} C^n X$$

dessen unendlicher Kegel.

Definition 1.14 (Unendliche induzierte Kegelabbildung). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$(14) \quad C^\infty f := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} C^n f$$

die unendliche induzierte Kegelabbildung.

Es kommutiert also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i} & CX & \xrightarrow{C_i} & C^2X & \xrightarrow{C^2_i} & \dots \longrightarrow C^\infty X \\
 f \downarrow & & Cf \downarrow & & C^2f \downarrow & & \downarrow C^\infty f \\
 Y & \xrightarrow{i} & CY & \xrightarrow{C_i} & C^2Y & \xrightarrow{C^2_i} & \dots \longrightarrow C^\infty Y
 \end{array}$$

2. REDUZIERTER KEGEL

Der Kegel eines topologischen Raumes ist durch die kollabierte Teilmenge kanonisch punktiert. Für den Kegel eines punktierten topologischen Raumes ist dessen Punktierung dabei letztendlich vollkommen irrelevant, daher wird für diese bei dem Kegel zusätzlich das Einheitsintervall über diesem Punkt kollabiert, was diesen zudem mit der anderen kollabierten Teilmenge aufeinander kollabiert.

Definition 2.1 (Reduzierter Kegel). *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(15) \quad C_*(X, x_0) := (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1])$$

sein reduzierter Kegel.

Der reduzierte Kegel $C_*(X, x_0)$ wird mit der Produkt- und Quotiententopologie sowie dem Basispunkt $[(x_0, 0)]$ wieder zu einem punktierten topologischen Raum.

Beispiel 2.2. *Für den punktierten einpunktigen Raum $(\{*\}, *)$ ist $C_*(\{*\}, *) \cong (\{*\}, *)$.*

Der reduzierte Kegel kommutiert bis auf Homöomorphie mit dem Wedge-Produkt. Da $[0, 1]$ lokalkompakt ist, folgt mit Lemma (8.3) mit einem weiteren punktierten topologischen Raum (Y, y_0) :

$$(16) \quad C_*(X \vee Y) \cong (X \vee Y) \wedge [0, 1] \cong (X \wedge [0, 1]) \vee (Y \wedge [0, 1]) \cong C_*X \vee C_*Y.$$

2.1. INDUZIERTE REDUZIERTE KEGELABBILDUNG

Lemma 2.3 (Induzierte reduzierte Kegelabbildung). *Für topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist die induzierte reduzierte Kegelabbildung:*

$$(17) \quad C_*f: C_*(X, x_0) \rightarrow C_*(Y, y_0), C_*f([(x, t)]) := [(f(x), t)]$$

stetig, wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 C(X, x_0) & \xrightarrow{Cf} & C(Y, y_0) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0)
 \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. XXXX □

Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt offenbar $C_* \text{id}_{(X, x_0)} = \text{id}_{C_*(X, x_0)}$ und für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) sowie stetige Abbildungen $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sowie $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ gilt offenbar $C_*(g \circ f) = C_*g \circ C_*f$.

Korollar 2.4. *Der reduzierte Kegel ist ein kovarianter Funktor:*

$$(18) \quad C_*: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*, (X, x_0) \mapsto (C_*(X, x_0), [(x_0, 0)]), f \mapsto C_*f$$

2.2. VERBINDUNG MIT HOMOTOPIETHEORIE

Lemma 2.5. *Eine punktierte stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) ist genau dann nullhomotop, wenn sie über $i_*: (X, x_0) \hookrightarrow C(X, x_0), x \mapsto [(x, 0)]$ faktorisiert.*

Beweis. \Leftarrow : XXXX \Rightarrow : XXXX □

Lemma 2.6. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie homotope stetige punktierte Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sind die stetigen punktierten Abbildungen $Cf, Cg: C(X, x_0) \rightarrow C(Y, y_0)$ homotop.*

Beweis. Sei $H: (X, x_0) \times [0; 1] \rightarrow (Y, y_0)$ eine punktierte Homotopie zwischen f und g , also eine stetige Abbildung mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$ sowie $H(x_0, -) = \text{const}_{y_0}$. Mit der kanonischen Projektion $p_*: C(X, x_0) \times ([0, 1], 0) \rightarrow C(X \times [0, 1], (x_0, 0))$ aus Gleichung (??) ergibt sich eine wohldefinierte und stetige punktierte Homotopie durch:

$$(19) \quad \tilde{H}: C(X, x_0) \times ([0, 1], 0) \rightarrow C(Y, y_0), [(x, s)], t \mapsto [(H(x, t), s)]$$

mit welcher das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 C(X, x_0) \times ([0, 1], 0) & \xrightarrow{p_*} & C(X \times [0, 1], (x_0, 0)) & \xrightarrow{CH} & C(Y, y_0) \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 (X, x_0) \times ([0, 1], 0) & \xrightarrow{H} & & & Y
 \end{array}$$

kommutiert. □

2.3. VERBINDUNG VON WEGRAUM MIT REDUZIERTEM KEGEL

Sowohl der Wegraum $P: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ als auch der reduzierte Kegel $C: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ sind nach den Korollaren (??) und (2.4) jeweils Endofunktoren auf der Kategorie \mathbf{Top}_* der punktierten topologischen Räume. Daher lässt sich untersuchen, ob es natürliche Transformationen $P \Rightarrow C$ oder $C \Rightarrow P$ geben kann und welche sowie ob Adjunktionen $P \dashv C$ oder $C \dashv P$ bestehen.

Eine Verbindung der beiden Funktoren lässt sich anschaulich erahnen. Für topologische Räume X und Y ergibt sich durch „Currying“ (Veränderung der Reihenfolge der Auswertung von Abbildungen mit mehreren Variablen) eine eindeutige Korrespondenz zwischen Abbildungen $X \times [0, 1] \rightarrow Y$ und Abbildungen $X \rightarrow Y^{[0,1]}$. Da der Kegel CX ein Faktorraum von $X \times [0, 1]$ und der Wegraum

Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologischen Räume. Einer stetigen punktierten Abbildung $f: C(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ lässt sich eine stetige punktierte Abbildung:

$$(20) \quad \tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow P(Y, y_0), x \mapsto (t \mapsto f([(x, t)]))$$

zuordnen. Einer stetigen punktierten Abbildung $g: (X, x_0) \rightarrow P(Y, y_0)$ lässt sich umgekehrt eine stetige punktierte Abbildung:

$$(21) \quad \tilde{g}: C(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), [(x, t)] \mapsto g(x)(t)$$

zuordnen. Da die doppelte Anwendung der Konstruktion wieder auf die jeweils ursprünglichen Abbildungen zurückführt (also $\tilde{\tilde{f}} = f$ und $\tilde{\tilde{g}} = g$) bilden diese eine Bijektion zwischen den stetigen punktierten Abbildungen $(X, x_0) \rightarrow P(Y, y_0)$ und den stetigen punktierten Abbildungen $C(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

3. EINHÄNGUNG

Definition 3.1 (Einhängung). Für einen topologischen Raum X ist:

$$(22) \quad \Sigma X := (X \times [-1; 1]) / ((X \times \{-1\}) \cup (X \times \{1\}))$$

seine Einhängung. [?, p. 8]

Anschaulich wird der topologische Raum X durch das Kreuzprodukt mit dem Intervall $[-1; 1]$ zu einem Zylinder, dessen beide Randkreise jeweils zu einem Punkt zusammengezogen werden. Die Einhängung ΣX wird mit der Produkt- und Quotiententopologie wieder zu einem topologischen Raum.

Beispiel 3.2. Für den einpunktigen Raum $\{*\}$ ist $\Sigma\{*\} \cong [-1; 1]$.

Lemma 3.3. Es ist $\Sigma D^n \approx D^{n+1}$.

Beweis. XXXX

$$(23) \quad \Sigma D^n \rightarrow D^{n+1}, [(x, t)] \mapsto (x\sqrt{1-t^2}, t)$$

□

Lemma 3.4. Es ist $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

Beweis. XXXX

$$(24) \quad \Sigma S^n \rightarrow S^{n+1}, [(x, t)] \mapsto (x\sqrt{1-t^2}, t)$$

□

Lemma 3.5. Für CW-Komplexe X und Y ist: [?, Prop. 4I.1]

$$(25) \quad \Sigma(X \times Y) \stackrel{\text{he}}{\simeq} \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y).$$

Beweis. (Siehe MSE/301402; auf Seite 467) XXXX

□

Lemma 3.6. Für einen zusammenhängenden CW-Komplexe X und eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ auf einen Unterkomplex $s: A \hookrightarrow X$ (mit $r \circ s = \text{id}_A$) ist: [?, Aufgabe 4I.1]

$$(26) \quad \Sigma X \stackrel{\text{he}}{\simeq} \Sigma A \vee \Sigma(X/A).$$

Beweis. XXXX

□

3.1. ALTERNATIVE KONSTRUKTIONEN

Lemma 3.7. Für einen topologischen Raum X ist das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{!} & \{*\} \\ \downarrow [(\text{id}, 0)] & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

kokartesisch.

Beweis. XXXX

□

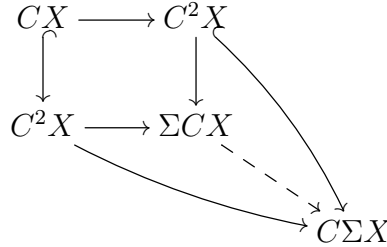
Lemma 3.8. Die Einhängung ist als Doppelkegel die Verklebung zweier Kegel an ihrer Unterseite. Für einen topologischen Raum X ist das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{[(\text{id}, 0)]} & CX \\ \downarrow [(\text{id}, 0)] & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

kokartesisch (und sogar schwach kartesisch).

Beweis. XXXX □

Wird im Diagramm in Lemma (3.8) des Abbildungskegels einmal X durch CX ersetzt (wobei sich ein kokartesisches Diagramm nach ΣCX ergibt) und einmal C darauf angewendet (wobei sich ein kommutatives Diagramm nach $C\Sigma X$ ergibt), folgt aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes die Existenz einer kanonischen stetige Abbildung $\Sigma CX \rightarrow C\Sigma X$:



Lemma 3.9. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(27) \quad \Sigma X_+ \cong \Sigma X \vee S^1.$$

Beweis. Es ist $X_+ \cong X \vee S^0$ und daher mit den Lemmata (XXXX) und (XXXX):

$$(28) \quad \Sigma X_+ \cong \Sigma(X \vee S^0) \cong \Sigma X \vee \Sigma S^0 \cong \Sigma X \vee S^1.$$

□

Lemma 3.10. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(29) \quad \Sigma X^* = \text{????}$$

Beweis. XXXX □

Für einen topologischen Raum X sind die Räume $\Sigma X \times [0, 1]$ und die Einhängung $\Sigma(X \times [0, 1])$ beide Quotientenräume des Raumes $X \times [0, 1] \times [0, 1]$. Die Äquivalenzrelation des ersten Raumes (wo $X \times [0, 1] \times \{0\}$ und $X \times [0, 1] \times \{1\}$ jeweils entlang von X kollabiert werden) ist jedoch schwächer als die der Einhängung (wo $X \times [0, 1] \times \{0\}$ und $X \times [0, 1] \times \{1\}$ jeweils komplett kollabiert werden), woraus sich eine kanonische stetige Abbildung:

$$(30) \quad q: \Sigma X \times [0, 1] \rightarrow \Sigma(X \times [0, 1]), [(x, s), t] \mapsto [(x, s, t)]$$

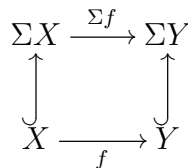
ergibt.

3.2. INDUZIERT EINHÄNGUNGSABBILDUNG

Lemma 3.11 (Induzierte Einhängungsabbildung). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist die induzierte Einhängungsabbildung:*

$$(31) \quad \Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y, \Sigma f([(x, t)]) := [(f(x), t)]$$

stetig, wobei das Diagramm



kommutiert.

Beweis. (Mit Kategorientheorie.) Die induzierte Einhängungsabbildung wird durch die universelle Eigenschaft des Kofaserproduktes nach Lemma (3.7) induziert: □

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{!} & \{*\} \\
 \downarrow [(\text{id}, 0)] & & \downarrow \\
 CX & \xrightarrow{[(x,t)]_{CX} \mapsto [(x,t)]_{\Sigma X}} & \Sigma X \\
 \downarrow Cf & & \downarrow \Sigma f \\
 CY & \xrightarrow{[(x,t)]_{CY} \mapsto [(x,t)]_{\Sigma Y}} & \Sigma Y
 \end{array}$$

Korollar 3.12. Die induzierte Einhängungsabbildung einer surjektiven (stetigen) Abbildung ist surjektiv.

Beispiel 3.13. Für einen topologischen Raum X ist die induzierte Einhängungsabbildung der terminalen Abbildung $X \xrightarrow{!} \{*\}$ mit Beispiel (3.2) gegeben durch:

$$(32) \quad \Sigma X \xrightarrow{\Sigma !} [-1; 1], [(x, t)] \mapsto t.$$

Für einen topologischen Raum X gilt offenbar $\Sigma \text{id}_X = \text{id}_{\Sigma X}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ sowie $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\Sigma(g \circ f) = \Sigma g \circ \Sigma f$.

Korollar 3.14. Die Einhängung ist ein kovarianter Funktor:

$$(33) \quad \Sigma: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}, X \mapsto \Sigma X, f \mapsto \Sigma f.$$

Ein topologischer Raum X kann in seinen Kegel CX eingebettet werden durch $\iota: X \hookrightarrow CX, x \mapsto [(x, 0)]_{CX}$. Für den Kospan $CX \xleftarrow{\iota} X \xrightarrow{\iota} CX$ kann die Existenz und Form des Kofaserproduktes untersucht werden.

Lemma 3.15. Für einen topologischen Raum X ist:

$$(34) \quad mmSX \cong CX +_X CX.$$

Beweis. Seien $\iota_-: CX \rightarrow SX, [(x, -t)]_{CX} \mapsto [(x, t)]_{SX}$ und $\iota_+: CX \rightarrow SX, [(x, t)]_{CX} \mapsto [(x, t)]_{SX}$, dann ist:

$$(35) \quad \forall x \in X: \iota_-(\iota_+(x)) = \iota_-([(x, 0)]_{CX}) = [(x, 0)]_{SX} = \iota_+([(x, 0)]_{CX}) = \iota_+(\iota_-(x))$$

Das zeigt zudem, dass X ein schwaches Faserprodukt des Spans $CX \xleftarrow{\iota_-} SX \xrightarrow{\iota_+} CX$ ist.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\iota} & CX \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \iota_+ \\
 CX & \xrightarrow{\iota_-} & SX \\
 & \searrow \kappa_- & \downarrow \phi \\
 & & Y
 \end{array}$$

Sei Y ein topologischer Raum und seien $\kappa_-, \kappa_+: CX \rightarrow Y$ mit $\kappa_- \circ \iota = \kappa_+ \circ \iota$. Für eine Abbildung $\phi: SX \rightarrow Y$, für die $\kappa_- = \phi \circ \iota_-$ und $\kappa_+ = \phi \circ \iota_+$, folgt durch Einsetzen von $[(x, t)]_{CX} \in CX$, dass $\kappa_-([(x, t)]_{CX}) = \phi([(x, -t)]_{SX})$ und $\kappa_+([(x, t)]_{CX}) = \phi([(x, t)]_{SX})$, wobei überall $0 \leq t \leq 1$, womit:

$$(36) \quad \phi: SX \rightarrow Y, [(x, t)]_{SX} \mapsto \begin{cases} \kappa_+([(x, t)]_{CX}) & ; t \geq 0 \\ \kappa_-([(x, -t)]_{CX}) & ; t \leq 0 \end{cases},$$

was ϕ eindeutig festlegt. □

Mit Lemma (3.4) und (1.4) ist:

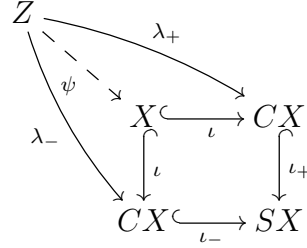
$$(37) \quad S^{n+1} \cong SS^n \cong CS^n +_{S^n} CS^n \cong \mathbb{D}^{n+1} +_{S^n} \mathbb{D}^{n+1}$$

X ist sogar ein (starkes) Faserprodukt des Spans $CX \xrightarrow{\iota_-} SX \xleftarrow{\iota_+} CX$:

Lemma 3.16. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(38) \quad X \cong CX \times_{SX} CX$$

Beweis.

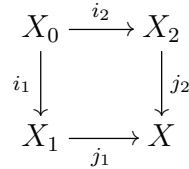


Sei Z ein topologischer Raum und seien $\lambda_-, \lambda_+ : Z \rightarrow CX$ mit $\iota_- \circ \lambda_- = \iota_+ \circ \lambda_+$, womit insbesondere $\lambda_-(Z) = \lambda_+(Z) \subseteq \iota(X)$ und es Abbildungen $\psi_-, \psi_+ : Z \rightarrow X$ gibt mit $\lambda_- = \iota \circ \psi_-$ und $\lambda_+ = \iota \circ \psi_+$. Da ι_-, ι_+ und ι injektiv sind folgt aus $\iota_- \circ \iota \circ \psi_- = \iota_+ \circ \iota \circ \psi_+$, dass $\psi_- = \psi_+$ und damit $\lambda_- = \lambda_+$. Für eine Abbildung $\psi : Z \rightarrow X$, für die $\lambda_- = \lambda_+ = \iota \circ \psi$, folgt durch Einsetzen von $z \in Z$, dass $\lambda_-(z) = \lambda_+(z) = [(\psi(z), 0)]_{CX}$, was ψ eindeutig festlegt. □

Mit Lemma (1.4) und (3.4) ist:

$$(39) \quad S^n \cong CS^n \times_{SS^n} CS^n = \mathbb{D}^{n+1} \times_{S^{n+1}} \mathbb{D}^{n+1}$$

Lemma 3.17. *Für ein Kofaserprodukt:*



von topologischen Räumen ist:

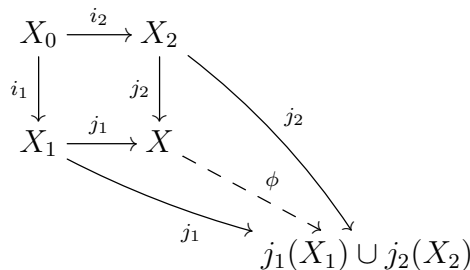
$$(40) \quad X = j_1(X_1) \cup j_2(X_2)$$

$$(41) \quad X_0 \cong j_1(X_1) \cap j_2(X_2),$$

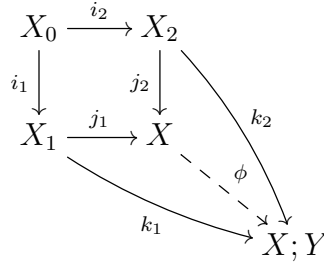
wobei $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2 : X_0 \xrightarrow{\cong} j_1(X_1) \cap j_2(X_2)$ ein Homöomorphismus ist.

Daraus folgt insbesondere, dass i_1 und i_2 injektiv sind.

Beweis. Wäre $j_1(X_1) \cup j_2(X_2) \subset X$ echt, gäbe es keine eindeutige Abbildung $\phi : X \rightarrow j_1(X_1) \cup j_2(X_2)$, deren Einschränkung auf $j_1(X_1) \cup j_2(X_2)$ die Identität ist, womit die universelle Eigenschaft verletzt wäre:



$j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ ist injektiv. Seien $x_0, y_0 \in X_0$ mit $(j_1 \circ i_1)(x_0) = (j_2 \circ i_2)(y_0)$. Sei $X \subset Y$ echt und seien $k_i: X_i \rightarrow Y$ mit $k_1 \circ i_1 = k_2 \circ i_2$ und $(k_1 \circ i_1)(x_0) \neq (k_2 \circ i_2)(y_0)$, dann kann es keine Abbildungen $\phi: X \rightarrow Y$ geben, für die $k_i = \phi \circ j_i$, da dann $(k_1 \circ i_1)(x_0) = (\phi \circ j_1 \circ i_1)(x_0) = (\phi \circ j_2 \circ i_2)(y_0) = (k_2 \circ i_2)(y_0)$.



$j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ ist surjektiv. Sei $x \in j_1(X_1) \cap j_2(X_2)$, dann $\exists x_1 \in X_1: j_1(x_1) = x$ und $\exists x_2 \in X_2: j_2(x_2) = x$. Wegen $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ gilt $x_1 \in i_1(X_0) \Leftrightarrow x_2 \in i_2(X_0)$, in diesem Fall gäbe es ein Urbild in X_0 . Sei $x_1 \notin i_1(X_0) \Leftrightarrow x_2 \notin i_2(X_0)$, dann können Abbildungen $k_i: X_i \rightarrow X$ mit $k_1 \circ i_1 = k_2 \circ i_2$ gewählt werden, für die $k_1(x_1) \neq k_2(x_2)$. Dann kann es jedoch keine Abbildung $\phi: X \rightarrow X$ geben, für die $k_i = \phi \circ j_i$, da dann $k_1(x_1) = (\phi \circ j_1)(x_1) = (\phi \circ j_2)(x_2) = k_2(x_2)$ wäre.

Die Umkehrabbildung von $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ ist stetig. Sei $U \subset j_1(X_1) \cap j_2(X_2)$ offen, dann sind $j_1^{-1}(U) \subset X_1$ und $j_2^{-1}(U) \subset X_2$ offen. [fehlt] □

Lemma 3.18. Für jeden Kospan $X_1 \xleftarrow{i_1} X_0 \xrightarrow{i_2} X_2$ topologischer Räume existiert ein Kofaserprodukt, gegeben durch:

$$(42) \quad (X_1 \sqcup X_2) / \left(\bigvee_{x_0 \in X_0} : i_1(x_0) \sim i_2(x_0) \right)$$

Beweis. □

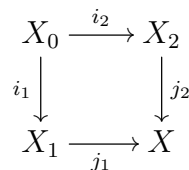
Definition 3.19 (Retrakt). Für topologische Räume X und Y , für die es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ gibt, wird X Retrakt von Y , g Retraktion und f Retraktion-Inklusion genannt.

Die Einschränkung $f: X \rightarrow f(X)$ ist ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung g . Wenn $f(X)$ abgeschlossen ist, wird der Retrakt abgeschlossen genannt.

Definition 3.20 (Deformationsretrakt). Für topologische Räume X und Y , für die es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $g \circ f \simeq \text{id}_Y$ wird X ein Deformationsretrakt von Y , g Deformationsretraktion und f Deformationsretrakt-Inklusion genannt.

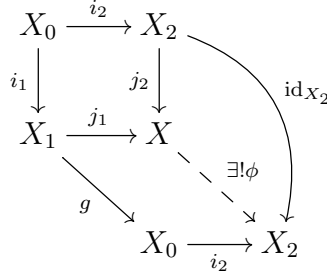
Wenn es eine offene Umgebung $f(X) \subset U \subset Y$ gibt und $f: X \rightarrow U$ ein Deformationsretrakt ist, wird X Umgebungs-Deformationsretrakt genannt.

Lemma 3.21. Für ein kokartesisches Diagramm:



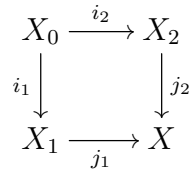
topologischer Räume ist j_1 eine Retrakt-Inklusion, wenn i_1 eine ist, j_1 eine Deformationsretrakt-Inklusion wenn i_1 eine ist und j_1 eine Umgebungs-Deformationsretrakt-Inklusion, wenn i_1 eine ist.

Beweis. Sei i_1 eine Retrakt-Inklusion mit Retraktion $g: X_1 \rightarrow X_0$ mit $g \circ i_1 = \text{id}_{X_0}$, dann folgt aus dem Diagramm:



die Existenz eines $\phi: X \rightarrow X_2$, für das $\phi \circ j_2 = \text{id}_{X_2}$. □

Lemma 3.22. *Für ein kokartesisches Diagramm:*



von topologischen Räumen ist $j'_1 := j_1|_{X_1 - i_1(X_0)}: X_1 - i_1(X_0) \rightarrow X - j_2(X_2)$ ein Homöomorphismus.

Beweis. j'_1 ist wohldefiniert. Sei $x_1 \in X_1 - i_1(X_0)$ mit $j_1(x_1) \in j_2(X_2)$, also $\exists x_2 \in X_2: j_1(x_1) = j_2(x_2)$, dann $\exists x_0 \in X_0: i_1(x_0) = x_1 \wedge i_2(x_0) = x_2$ nach Lemma (3.17), was $x_1 \notin i_1(X_0)$ widerspricht. Daher ist $j_1(x_1) \in X - j_2(X_2)$.

j'_1 ist injektiv. Seien $x_1, y_1 \in X_1 - i_1(X_0)$ mit $j_1(x_1) = j_1(y_1)$, sei $X \subset Y$ echt und $k_i: X_i \rightarrow Y$ derart, dass $k_1 \circ i_1 = k_2 \circ i_2$ und $k_1(x_1) \neq k_1(y_1)$, dann kann es keine Abbildung $\phi: X \rightarrow Y$ geben, für die $k_1 = \phi \circ j_1$, da dann $k_1(x_1) = (\phi \circ j_1)(x_1) = (\phi \circ j_1)(y_1) = k_1(y_1)$.

j'_1 ist surjektiv. Sei $x \in X - j_2(X_2)$, dann $\exists x_1 \in X_2: j_1(x_1) = x$ nach Lemma (3.17). Wenn $\exists x_0 \in X_0: i_1(x_0) = x_1$, dann $j_2(i_2(x_0)) = j_1(i_1(x_0)) = j_1(x_1) = x$, was $x \notin j_1(X_2)$ widerspricht. Daher ist $x_1 \in X_1 - i_1(X_0)$.

Die Umkehrabbildung von j'_1 ist stetig. □

Beispiel 3.23. *Für einen topologischen Raum X ist die Abbildung:*

$$(43) \quad \Sigma CX \rightarrow C\Sigma X, [(x, s, t)] \mapsto [(x, s, t)]$$

nicht wohldefiniert. Es ist $(x, 0, 0) \sim (x, 1, 0)$ unter der ersten Relation, aber $(x, 0, 0) \not\sim (x, 1, 0)$ unter der zweiten Relation.

Beispiel 3.24. *Für einen topologischen Raum X ist die Abbildung:*

$$(44) \quad C\Sigma X \rightarrow \Sigma CX, [(x, s, t)] \mapsto [(x, s, t)]$$

nicht wohldefiniert. Es ist $(x, 0, t) \sim (x, 0, t)$ für $t \in (0; 1)$ unter der ersten Relation, aber $(x, 0, t) \not\sim (x, 0, t)$ unter der zweiten Relation.

3.3. VERBINDUNG MIT HOMOTOPIETHEORIE

Lemma 3.25. *Für topologische Räume X und Y sowie homotope stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ sind die stetigen Abbildungen $\Sigma f, \Sigma g: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ homotop.*

Beweis. Sei $H: X \times [0; 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , also eine stetige Abbildung mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$. Mit der kanonischen Projektion $q: \Sigma X \times [0, 1] \rightarrow \Sigma(X \times [0, 1])$ aus Gleichung (30) ergibt sich eine wohldefinierte und stetige Homotopie durch:

$$(45) \quad \tilde{H} = \Sigma H \circ q: \Sigma X \times [0, 1] \rightarrow \Sigma Y, [(x, s), t] \mapsto [(H(x, t), s)]$$

mit welcher das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{H} & & \\ & \searrow & \text{---} & \searrow & \\ \Sigma X \times [0, 1] & \xrightarrow{q} & \Sigma(X \times [0, 1]) & \xrightarrow{\Sigma H} & \Sigma Y \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & & & Y \end{array}$$

kommutiert. Für diese Homotopie gilt mit der induzierten Einhängungsabbildung nach Lemma (3.11):

$$(46) \quad \tilde{H}(-, 0): \Sigma X \rightarrow \Sigma Y, [(x, s)] \mapsto [(H(x, 0), s)] = [(f(x), s)] = \Sigma f([(x, s)])$$

$$(47) \quad \tilde{H}(-, 1): \Sigma X \rightarrow \Sigma Y, [(x, s)] \mapsto [(H(x, 1), s)] = [(g(x), s)] = \Sigma g([(x, s)]),$$

daher verbindet diese $\tilde{H}(-, 0) = \Sigma f$ und $\tilde{H}(-, 1) = \Sigma g$. \square

3.4. UNENDLICHE EINHÄNGUNG

Für einen topologischen Raum X gibt es eine kanonische Einbettung $j: X \hookrightarrow \Sigma X, x \mapsto [(x, 0)]$ in dessen Einhängung ΣX , wobei sich durch die induzierten Kegelabbildungen eine Kette an stetigen Abbildungen ergibt, deren Kolimes sich bilden lässt:

$$X \xrightarrow{j} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 j} \dots \longrightarrow \Sigma^\infty X$$

Definition 3.26 (Unendliche Einhängung). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(48) \quad \Sigma^\infty X := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n X$$

dessen unendliche Einhängung.

Definition 3.27 (Unendliche induzierte Einhängungsabbildung). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$(49) \quad C^\infty f := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} C^n f$$

die unendliche induzierte Einhängungsabbildung.

Es kommutiert also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma^2 X & \xrightarrow{\Sigma^2 i} & \dots \longrightarrow \Sigma^\infty X \\ \downarrow f & & \downarrow \Sigma f & & \downarrow \Sigma^2 f & & \downarrow \Sigma^\infty f \\ Y & \xrightarrow{i} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma^2 Y & \xrightarrow{\Sigma^2 i} & \dots \longrightarrow \Sigma^\infty Y \end{array}$$

4. REDUZIERTE EINHÄNGUNG

Die Einhängung eines topologischen Raumes ist durch einen der beiden kollabierten Teilmengen kanonisch punktiert, wobei die Wahl aufgrund der Symmetrie der Einhängung irrelevant ist. Für die Einhängung eines punktierten topologischen Raumes ist dessen Punktierung dabei letztendlich vollkommen irrelevant, daher wird für diese bei der Einhängung zusätzlich das Einheitsintervall über diesem Punkt kollabiert, was zudem die beiden kollabierten Teilmengen damit aufeinander kollabiert.

Definition 4.1 (Reduzierte Einhängung). *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(50) \quad \Sigma(X, x_0) := (X \times [-1; 1]) / ((X \times \{-1; 1\}) \cup (\{x_0\} \times [-1; 1]))$$

seine reduzierte Einhängung.

Die reduzierte Einhängung $\Sigma(X, x_0)$ wird mit der Produkt- und Quotiententopologie sowie dem Basispunkt $[(x_0, 0)]$ wieder zu einem punktierten topologischen Raum.

Beispiel 4.2. *Für den punktierten einpunktigen Raum $(\{*\}, *)$ ist $\Sigma(\{*\}, *) \cong (\{*\}, *)$.*

Korollar 4.3. *Für die Einhängung der Sphäre gilt:*

$$(51) \quad \Sigma(S^n, *) = [(S^n \setminus \{*\}) \times (0; 1)]^* \cong [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}]^* = [\mathbb{R}^{n+1}]^* = S^{n+1}.$$

Lemma 4.4. *Die reduzierte Einhängung ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(52) \quad \Sigma_* X \cong X \wedge S^1$$

$$(53) \quad \Sigma_*^n X \cong X \wedge S^n.$$

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \longrightarrow & X \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma X & & X \wedge S^1 \\ X \times Y \times [0, 1] & \longrightarrow & X \times Y \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X * Y & & \Sigma(X \wedge Y) \end{array}$$

□

Beweis. XXXX

$$\begin{aligned} \Sigma(X, x_0) &= (X \times [0, 1]) / (X \times \{0; 1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1]) \\ &\cong [(X \times [0, 1]) \setminus (X \times \{0; 1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1])]^* = [(X \setminus \{x_0\}) \times (0; 1)]^* \\ &\cong [(X \setminus \{x_0\}) \times (S^1 \setminus \{*\})]^* = [(X \times S^1) \setminus ((X, x_0) \vee (S^1, *))]^* \\ (54) \quad &= (X \times S^1) / ((X, x_0) \vee (S^1, *)) = (X, x_0) \wedge (S^1, *) \end{aligned}$$

□

Die reduzierte Einhängung kommutiert bis auf Homöomorphie mit dem Wedge-Produkt. Da S^n lokalkompakt ist, folgt mit Lemma (8.3) mit einem weiteren punktierten topologischen Raum (Y, y_0) :

$$(55) \quad \Sigma^n(X \vee Y) \cong (X \vee Y) \wedge S^n \cong (X \wedge S^n) \vee (Y \wedge S^n) \cong \Sigma^n X \vee \Sigma^n Y.$$

Lemma 4.5. Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum X ist:

$$(56) \quad \Sigma_* X^* \cong (X \times \mathbb{R})^*.$$

Beweis. Mit Lemma (4.4) und Lemma (8.7), wobei verwendet wird, dass \mathbb{R} ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, ist:

$$(57) \quad \Sigma_* X^* = X^* \wedge S^1 = X^* \wedge \mathbb{R}^* \cong (X \times \mathbb{R})^*.$$

□

Lemma 4.6. Für einen kompakten Hausdorff-Raum X ist:

$$(58) \quad \Sigma_* X_+ = \Sigma_* X^* \cong (X \times \mathbb{R})^*.$$

Beweis. Mit Lemma (4.4), Lemma (8.8), Lemma (XXXX), wobei benutzt wird, dass $X \times S^1$ ein kompakter Hausdorff-Raum sowie die Teilmenge $X \times \{*\}$ abgeschlossen ist, Lemma (8.7), wobei benutzt wird, dass $X \times (0; 1)$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, und wieder Lemma (4.4) ist:

$$(59) \quad \begin{aligned} \Sigma_* X_+ &\cong X_+ \wedge S^1 \cong (X \times S^1)/(X \times \{*\}) \cong [(X \times S^1) \setminus (X \times \{*\})]^* \\ &= [X \times (S^1 \setminus \{*\})]^* = [X \times (0; 1)]^* \cong X^* \wedge \mathbb{R}^* \cong X^* \wedge S^1 \cong \Sigma_* X^* \end{aligned}$$

□

Die Rechnung:

$$(60) \quad \Sigma_* X_+ = \Sigma_*(X \vee S^0) = \Sigma_* X \vee \Sigma_* S^0 = \Sigma_* X \vee S^1$$

ist falsch. X_+ und $X \vee S^0$ sind zwar homöomorph, jedoch verschieden punktiert. Der linke Raum wird durch einen disjunkt mit X vereinigten Punkt und der rechte Raum durch einen Punkt in X punktiert.

4.1. ALTERNATIVE KONSTRUKTIONEN

Lemma 4.7. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{!} & \{*\} \\ \downarrow [(\text{id}, 0)] & & \downarrow \\ C(X, x_0) & \longrightarrow & \Sigma(X, x_0) \end{array}$$

kokartesisch.

Beweis. XXXX

□

Lemma 4.8. Die Einhängung ist als Doppelkegel die Verklebung zweier Kegel an ihrer Unterseite. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{[(\text{id}, 0)]} & C(X, x_0) \\ \downarrow [(\text{id}, 0)] & & \downarrow \\ C(X, x_0) & \longrightarrow & \Sigma(X, x_0) \end{array}$$

kokartesisch (und sogar schwach kartesisch).

Beweis. XXXX

□

4.2. INDUZIERTE REDUZIERTE EINHÄNGUNGSABBILDUNG

Lemma 4.9 (Induzierte reduzierte Einhängungsabbildung). *Für topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist die induzierte reduzierte Einhängungsabbildung:*

$$(61) \quad \Sigma_* f: \Sigma_*(X, x_0) \rightarrow \Sigma_*(Y, y_0), \Sigma_* f([(x, t)]) := [(f(x), t)]$$

stetig, wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma(Y, y_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. XXXX □

Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt offenbar $\Sigma_* \text{id}_{(X, x_0)} = \text{id}_{\Sigma_*(X, x_0)}$ und für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) sowie stetige Abbildungen $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sowie $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ gilt offenbar $\Sigma_*(g \circ f) = \Sigma_* g \circ \Sigma_* f$.

Korollar 4.10. *Die reduzierte Einhängung ist ein kovarianter Funktor:*

$$(62) \quad \Sigma_*: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*, (X, x_0) \mapsto (\Sigma_*(X, x_0), [(x_0, 0)]), f \mapsto \Sigma_* f.$$

4.3. VERBINDUNG MIT HOMOTOPIETHEORIE

Lemma 4.11. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie homotope stetige punktierte Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sind die stetigen punktierten Abbildungen $\Sigma f, \Sigma g: \Sigma(X, x_0) \rightarrow \Sigma(Y, y_0)$ homotop.*

Beweis. Sei $H: (X, x_0) \times [0, 1] \rightarrow (Y, y_0)$ eine punktierte Homotopie zwischen f und g , also eine stetige Abbildung mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$ sowie $H(x_0, -) = \text{const}_{y_0}$. Aufgrund der Punktierttheit von f und g gibt es dabei keinen Widerspruch der Bedingungen bei $H(x_0, 0) = H(x_0, 1) = y_0$. Mit der kanonischen Projektion $q_*: \Sigma(X, x_0) \times ([0, 1], 0) \rightarrow \Sigma(X \times [0, 1], (x_0, 0))$ aus Gleichung (??) ergibt sich eine wohldefinierte und stetige punktierte Homotopie durch:

$$(63) \quad \tilde{H}: \Sigma(X, x_0) \times ([0, 1], 0) \rightarrow \Sigma(Y, y_0), [(x, s)], t \mapsto [(H(x, t), s)]$$

mit welcher das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\tilde{H}} & \\ \Sigma(X, x_0) \times ([0, 1], 0) & \xrightarrow{q_*} \Sigma(X \times [0, 1], (x_0, 0)) \xrightarrow{\Sigma H} & \Sigma(Y, y_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (X, x_0) \times ([0, 1], 0) & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

kommutiert. Für diese Homotopie gilt mit der induzierten reduzierten Einhängungsabbildung nach Lemma (4.9):

$$(64) \quad \tilde{H}(-, 0): \Sigma(X, x_0) \rightarrow \Sigma(Y, y_0), [(x, s)] \mapsto [(H(x, 0), s)] = [(f(x), s)] = \Sigma f([(x, s)])$$

$$(65) \quad \tilde{H}(-, 1): \Sigma(X, x_0) \rightarrow \Sigma(Y, y_0), [(x, s)] \mapsto [(H(x, 1), s)] = [(g(x), s)] = \Sigma g([(x, s)]),$$

daher verbindet sie $\tilde{H}(-, 0) = \Sigma f$ und $\tilde{H}(-, 1) = \Sigma g$. □

4.4. VERBINDUNG VON SCHLEIFENRAUM UND REDUZIRTER EINHÄNGUNG

Sowohl der Schleifenraum $\Omega: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ als auch die reduzierte Einhängung $\Sigma: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ sind nach den Korollaren (??) und (4.10) jeweils Endofunktoren auf der Kategorie \mathbf{Top}_* der punktierten topologischen Räume. Daher lässt sich untersuchen, ob es natürliche Transformationen $\Omega \Rightarrow \Sigma$ oder $\Sigma \Rightarrow \Omega$ geben kann und welche sowie ob Adjunktionen $\Omega \dashv \Sigma$ oder $\Sigma \dashv \Omega$ bestehen.

Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologischen Räume. Einer stetigen punktierten Abbildung $f: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ lässt sich eine stetige punktierte Abbildung:

$$(66) \quad \tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0), x \mapsto (t \mapsto f([(x, t)]))$$

zuordnen. Einer stetigen punktierten Abbildung $g: (X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0)$ lässt sich umgekehrt eine stetige punktierte Abbildung:

$$(67) \quad \tilde{g}: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), [(x, t)] \mapsto g(x)(t)$$

zuordnen. Da die doppelte Anwendung der Konstruktion wieder auf die jeweils ursprünglichen Abbildungen zurückführt (also $\tilde{\tilde{f}} = f$ und $\tilde{\tilde{g}} = g$) bilden diese eine Bijektion zwischen den stetigen punktierten Abbildungen $(X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0)$ und den stetigen punktierten Abbildungen $\Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Wegen der Adjunktion $C \dashv P$ entspricht für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) die kanonische Einbettung $\Omega(X, x_0) \hookrightarrow P(X, x_0)$ einer stetigen Abbildung:

$$(68) \quad C\Omega(X, x_0) \rightarrow (X, x_0), [(\gamma, t)] \mapsto \gamma(t)$$

sowie die kanonische Projektion $C(X, x_0) \rightarrow \Sigma(X, x_0)$ einer stetigen Abbildung:

$$(69) \quad (X, x_0) \rightarrow P\Sigma(X, x_0), x \mapsto (t \mapsto [(x, t)])$$

Diese stetigen Abbildungen faktorisieren jeweils über Einheit und Koeinheit der Adjunktion $\Sigma \dashv \Omega$.

5. HOPF-KONSTRUKTION

Für topologische Räume X und Y sind der Verbund $X * Y$ und die Einhängung $\Sigma(X \times Y)$ beide Quotientenräume des Raumes $X \times Y \times [0, 1]$. Die Äquivalenzrelation des Verbundes (wo $X \times Y \times \{0\}$ und $X \times Y \times \{1\}$ jeweils entlang von X und Y kollabiert werden) ist jedoch schwächer als die der Einhängung (wo $X \times Y \times \{0\}$ und $X \times Y \times \{1\}$ jeweils komplett kollabiert werden), woraus sich eine kanonische stetige Abbildung:

$$(70) \quad H': X * Y \rightarrow \Sigma(X \times Y), [(x, y, t)] \mapsto [(x, y, t)]$$

ergibt.

Definition 5.1 (Hopf-Konstruktion). *Für topologische Räume X, Y und Z sowie eine stetige Abbildung $f: X \times Y \rightarrow Z$ ist:*

$$(71) \quad H_f := \Sigma f \circ H': X * Y \rightarrow \Sigma Z$$

ihre Hopf-Konstruktion.

Da die Einhängung Σ nach Lemma (3.25) und die Komposition \circ nach Lemma (XXXX) jeweils Homotopien erhalten, ist die Hopf-Konstruktion eine wohldefinierte Abbildung:

$$(72) \quad H: [X \times Y, Z] \rightarrow [X * Y, \Sigma Z], [f] \mapsto [H_f]$$

Beispiel 5.2. Für $Y = \{0\}$ ergibt sich nach Beispiel (XXXX) eine stetige Abbildung $H: [X, Z] \rightarrow [CX, \Sigma Z]$ und für $Y = \{0; 1\}$ (mit diskreter Topologie) ergibt sich nach Beispiel (XXXX) eine stetige Abbildung $H: [X, Z] + [X, Z] \rightarrow [\Sigma X, \Sigma Z]$.

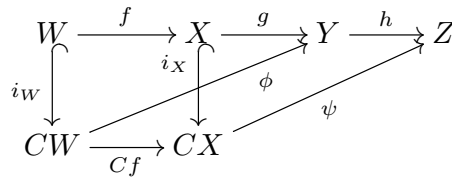
Für eine topologische Gruppe X gibt es eine kanonische stetige Abbildung $X * X \rightarrow \Sigma X$, nämlich die Hopf-Konstruktion der Verknüpfung $X \times X \rightarrow X$.

Für eine Sphäre S^{n-1} mit Gruppenstruktur (nur möglich für $n = 1; 2; 4; 8$ durch $S^0 \cong \mathbb{Z}_2$, $S^1 \cong U(1)$, $S^3 \cong SU(2)$ und S^7 mit Moufang-Struktur), also insbesondere einer Verknüpfung $f: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, ist ihre Hopf-Konstruktion mit den Beispielen (XXXX) und (XXXX) eine Abbildung $H_f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$.

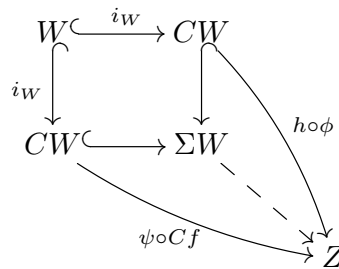
Die Hopf-Konstruktion erzeugt eine Verbindung von Kohomotopien. Mit $Z = S^n$ und $\Sigma Z = S^{n+1}$ nach Lemma (XXXX) ist die Hopf-Konstruktion eine stetige Abbildung $\pi^n(X \times Y) \rightarrow \pi^{n+1}(X * Y)$.

6. TODA-KLAMMER

Für eine Sequenz $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ in der $g \circ f$ und $h \circ g$ nullhomotop sind, faktorisieren diese nach Lemma (1.11) über $W \hookrightarrow CW$ and $X \hookrightarrow CX$, wobei die stetigen Abbildungen $\phi: CW \rightarrow Y$ und $\psi: CX \rightarrow Z$ nicht unbedingt eindeutig bis auf Homotopie sind und $h \circ \phi \neq \psi \circ Cf$ gelten kann:

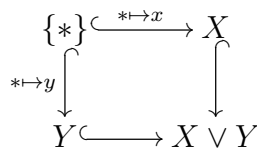


Jedoch ist die Präkomposition mit i_W gleich wegen $h \circ \phi \circ i_W = h \circ g \circ f = \psi \circ i_X \circ f = \psi \circ Cf \circ i_W$. Mit Lemma (3.8) induziert die universelle Eigenschaft des Faserproduktes eine stetige Abbildung $\Sigma W \rightarrow Z$:

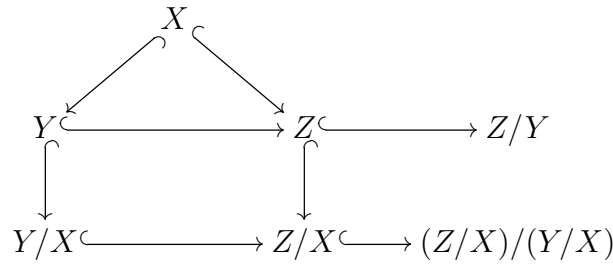


7. WEDGE-PRODUKT

Definition 7.1.



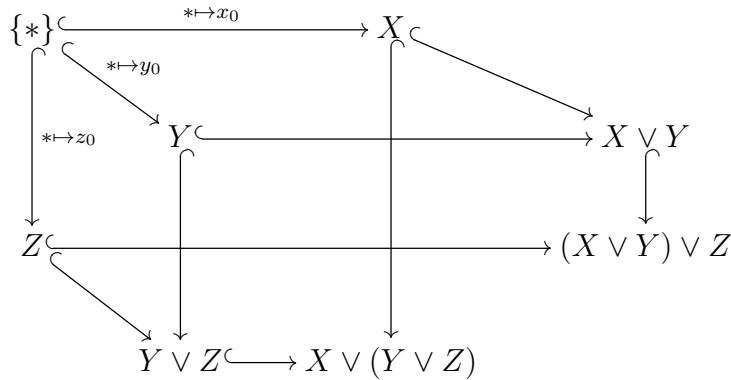
[?, Def. 1.21]



Lemma 7.2. Das Wedge-Produkt ist assoziativ bis auf Homöomorphie. Für topologische Räume X, Y und Z ist:

$$(73) \quad (X \vee Y) \vee Z \approx X \vee (Y \vee Z).$$

Beweis. XXXX □



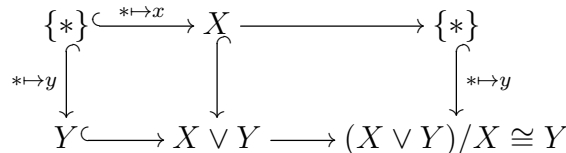
Das Smash-Produkt kann sowohl als Faser- als auch als Kofaserprodukt dargestellt werden:



Lemma 7.3. Für punktierte topologische Räume X und Y ist $(X \vee Y)/X \cong Y$.

Mit Korollar (XXXX) ist analog $(X \vee Y)/Y \cong X$.

Beweis. Das folgt aus der Kombination zweier kokartesischer Diagramme zu einem gemeinsamen kokartesischen Diagramm:



Das linke kokartesische Diagramm ist das des Wedge-Produktes $X \vee Y$, das rechte kokartesische Diagramm ist das des Quotientenraumes $(X \vee Y)/X$ und das gesamte Diagramm durch Kombination daher ebenso¹ das des Quotientenraumes $(X \vee Y)/X$, sowie trivialerweise ebenso das von Y . Die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeit des Kofaserproduktes bis auf Isomorphie². □

¹XXXX
²XXXX

Lemma 7.4. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(74) \quad (X + Y)_+ \cong X_+ \vee Y_+$$

Beweis. Das folgt aus der Kombination zweier kokartesischer Diagramme zu einem gemeinsamen kokartesischen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & & \downarrow \\
 \{*\} & \hookrightarrow & X_+ \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y \hookrightarrow & Y_+ \hookrightarrow & X_+ \vee Y_+
 \end{array}$$

$$(75) \quad X_+ \vee Y_+ = X_+ +_{\{*\}} Y_+ \cong X_+ +_{\{*\}} (\{*\} + Y) \cong X_+ + Y = (X + Y)_+$$

□

Lemma 7.5. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(76) \quad (X + Y)^* \cong X^* \vee Y^*$$

Beweis. XXXX

□

7.1. WEDGE-PRODUKT ALS FUNKTOR

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * \mapsto y_0 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \{*\} & \xrightarrow{* \mapsto x_0} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * \mapsto a_0 & & & & \\
 A & \hookrightarrow & A \vee X & \xrightarrow{A \vee f} & A \vee Y
 \end{array}$$

8. SMASH-PRODUKT

Definition 8.1 (Smash-Produkt). Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist:

$$(77) \quad X \wedge Y := X \times Y / (X \vee Y) = (X \times Y) / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$$

ihre Smash-Produkt. [?, Def. 1.21]

Der Name ergibt sich aus $X \wedge \{*\} \approx \{*\}$ für jeden topologischen Raum X .

Lemma 8.2. Das Smash-Produkt ist assoziativ bis auf Homotopieäquivalenz. Für topologische Räume X, Y und Z ist:

$$(78) \quad (X \wedge Y) \wedge Z \stackrel{he}{\cong} X \wedge (Y \wedge Z)$$

Beweis. Nach Lemma (XXXX) sind die Diagramme $\{*\} \leftarrow (X \vee Y) \vee Z \rightarrow$

□

Lemma 8.3. Für punktierte topologische Räume X, Y und Z mit letzterem lokalkompakt ist:

$$(79) \quad (X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

Beweis.

$$\begin{array}{ccccc}
 \{*\} & \xrightarrow{*\rightarrow x} & X & & \\
 \downarrow \scriptstyle{*\rightarrow y} & & \downarrow & & \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & X \vee Y & & \\
 & & \downarrow & & \\
 X \vee Z & \xrightarrow{\quad} & X \times Z & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y \vee Z & \xrightarrow{\quad} & \{*\} & \xrightarrow{\quad} & X \wedge Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y \times Z & \xrightarrow{\quad} & Y \wedge Z & \xrightarrow{\quad} & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)
 \end{array}$$

□

Lemma 8.4. Das Smash-Produkt ist kommutativ bis auf Homöomorphie. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(80) \quad X \wedge Y \approx Y \wedge X$$

Beweis.

□

Lemma 8.5. Für topologische Räume X und Y gilt die Homotopieäquivalenz:

$$(81) \quad X \star Y \xrightarrow{\text{he}} \Sigma(X \wedge Y)$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 8.6. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(82) \quad (X \times Y)_+ \cong X_+ \wedge Y_+.$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 8.7. Für lokalkompakte Hausdorff-Räume X und Y ist: [?, p. 87]

$$(83) \quad (X \times Y)^* \cong X^* \wedge Y^*.$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 8.8. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(84) \quad X_+ \wedge Y \cong (X \times Y)/(X \times \{y_0\}).$$

Beweis. XXXX

$$\begin{aligned}
 X_+ \wedge Y &= (X_+ \times Y)/(\{*\} \times Y \cup X_+ \times \{y_0\}) = [(X_+ \times Y) \setminus (\{*\} \times Y \cup X_+ \times \{y_0\})]^* \\
 (85) \quad &= [X \times (Y \setminus \{y_0\})]^* = [(X \times Y) \setminus (X \times \{y_0\})]^* = (X \times Y)/(X \times \{y_0\})
 \end{aligned}$$

□

$$(86) \quad \begin{aligned} X_+ \wedge Y_+ &\cong (X \times Y_+) / (X \times \{*\}) \cong [(X \times Y_+) \setminus (X \times \{*\})]^* \\ &= [X \times (Y_+ \setminus \{*\})]^* = (X \times Y)^* \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich von Definition (2.1) des reduzierten Kegels mit Definition (8.1) des Smash-Produktes folgt direkt:

Korollar 8.9. *Der reduzierte Kegel ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(87) \quad C(X, x_0) := (X, x_0) \wedge ([0, 1], 1).$$

Beweis. XXXX □

Lemma 8.10. *Der reduzierte Kegel ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(88) \quad C(X, x_0) := (X, x_0) \wedge ([0, 1], 1).$$

Beweis. XXXX □

Aus der Kombination von Korollar (8.12) mit Beispiel (XXXX) folgt direkt:

Korollar 8.11. *Der Kegel ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen topologischen Raum X ist (wobei $X_+ := X + \{*\}$):*

$$(89) \quad CX := X_+ \wedge ([0, 1], 1).$$

Lemma 8.12. *Die reduzierte Einhängung ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:*

$$(90) \quad \Sigma(X, x_0) := (X, x_0) \wedge S^1.$$

Beweis. XXXX □

Beispiel 8.13. *Der reduzierte Kegel ist ein spezielles Smash-Produkt. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist $C_*(X, x_0) = (X, x_0) \wedge ([0, 1], 1)$.*

Für die Einhängung des Smash-Produktes folgt:

$$(91) \quad \Sigma^m Y \wedge \Sigma^n Z = (S^m \wedge Y) \wedge (S^n \wedge Z) \cong \underbrace{(S^m \wedge S^n)}_{\cong S^{m+n}} \wedge (Y \wedge Z) = \Sigma^{m+n}(Y \wedge Z).$$

Lemma 8.14. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) mit Y lokalkompakt ist:*

$$(92) \quad \mathbf{Top}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}^*(Y, Z)).$$

Beweis. Betrachte die Abbildungen:

$$(93) \quad \phi: \mathbf{Top}_*(X \wedge Y, Z) \rightarrow \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}_*(Y, Z)), \phi(f)(x)(y) = f([(x, y)])$$

$$(94) \quad \psi: \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}_*(Y, Z)) \rightarrow \mathbf{Top}_*(X \wedge Y, Z), \psi(g)([(x, y)]) = g(x)(y).$$

$\psi(g)$ ist wohldefiniert. Für $x, x' \in X$ und $y, y' \in Y$ ist:

$$(95) \quad \psi(g)([(x, y_0)]) = g(x)(y_0) = z_0 = g(x')(y_0) = \psi(g)([(x', y_0)])$$

$$(96) \quad \psi(g)([(x_0, y)]) = g(x_0)(y) = c(y) = c(y') = g(x_0)(y') = \psi(g)([(x_0, y')]).$$

ϕ und ψ sind stetig. Sei $U \subseteq Z$ offen, dann ist $g(x)^{-1}(U) \subseteq Y$ offen.

$$(97) \quad \psi(g)^{-1}(U) = \{[(x, y)] \in X \wedge Y \mid g(x)(y) \in U\} = \{[(x, y)] \in X \wedge Y \mid y \in g(x)^{-1}(U)\}$$

Die kanonische Projektion $\pi: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ ist stetig, womit die induzierte Abbildung $\mathbf{Top}_*(\pi, Y): \mathbf{Top}_*(X \wedge Y, Z) \rightarrow \mathbf{Top}_*(X \times Y, Z)$ stetig ist.

ϕ und ψ sind zueinander invers, da:

$$(98) \quad \psi(\phi(f))([(x, y)]) = \phi(f)(x)(y) = f([(x, y)])$$

$$(99) \quad \phi(\psi(g))(x)(y) = \psi(g)([(x, y)]) = g(x)(y).$$

□

Für den Spezialfall $Y = S^1$ (lokalkompakt da kompakt) folgt mit Lemma (4.4):

$$(100) \quad \mathbf{Top}_*(\Sigma X, Z) = \mathbf{Top}_*(X \wedge S^1, Z) \cong \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}^*(S^1, Z)) = \mathbf{Top}_*(X, \Omega Z).$$

Für den Spezialfall $Y = S^n$ (lokalkompakt da kompakt) folgt mit Lemma (4.4):

$$(101) \quad \mathbf{Top}_*(\Sigma^n X, Z) = \mathbf{Top}_*(X \wedge S^n, Z) \cong \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}^*(S^n, Z)) = \mathbf{Top}_*(X, \Omega^n Z).$$

8.1. SMASH-PRODUKT ALS FUNKTOR

XXXX

9. ABBILDUNGSZYLINDER

Der Abbildungszylinder ist eine topologische Konstruktion, die einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen einen topologischen Raum zuordnet. Durch die Verbindung ihrer topologischen Eigenschaften, kann statt der stetigen Abbildung stattdessen ihr Abbildungszylinder untersucht werden.

Definition 9.1 (Abbildungszylinder). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist das Kofaserprodukt:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ (\text{id}, 0) \downarrow & & \downarrow \\ X \times [0, 1] & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

der Abbildungszylinder.

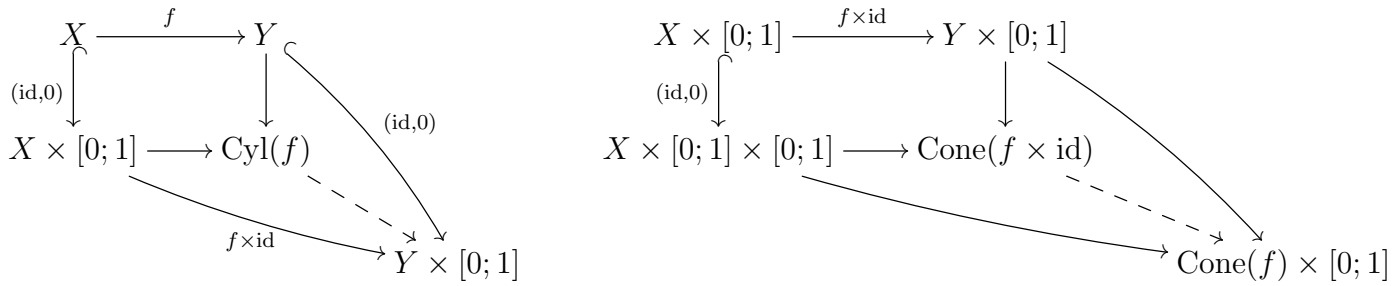
Beispiel 9.2. *Zylinder und Kegel sind spezielle Abbildungszylinder. Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(102) \quad \text{Cyl}(\text{id}_X) = X \times [0, 1]$$

$$(103) \quad \text{Cyl}(X \xrightarrow{!} \{*\}) \cong CX.$$

Aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes folgt: Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $\text{Cyl}(f) \rightarrow Y \times [0, 1]$, sodass $f \times \text{id}: X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ und $Y \hookrightarrow$

$Y \times [0; 1]$ über sie faktorisieren. Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $\text{Cone}(f \times \text{id}) \rightarrow \text{Cone}(f) \times [0; 1]$.



Die stetige Abbildung $CX \times [0; 1] \rightarrow C(X \times [0; 1])$, $([(x, s)], t) \mapsto [((x, t), s)]$ induziert eine stetige Abbildung $\text{Cyl}(Cf) \rightarrow C\text{Cyl}(f)$. Die stetige Abbildung $\Sigma X \times [0; 1] \rightarrow \Sigma(X \times [0; 1])$, $([(x, s)], t) \mapsto [((x, t), s)]$ induziert eine stetige Abbildung $\text{Cyl}(\Sigma f) \rightarrow \Sigma \text{Cyl}(f)$.

Lemma 9.3. *Die Abbildung $X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ ist eine Hurewicz-Kofaserung.*

Beweis. XXXX □

Lemma 9.4. *Die Abbildung $Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ ist eine Homotopieäquivalenz und eine Hurewicz-Kofaserung.*

Beweis. XXXX □

Lemma 9.5. *f ist eine Hurewicz-Kofaserung genau dann, wenn $X \times [0; 1] \rightarrow \text{Cyl}(f)$ eine stetige Retraktion besitzt.*

Beweis. XXXX □

Lemma 9.6. *f ist eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn $X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ ein Deformationsretrakt ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 9.7. *Es gilt:*

$$(104) \quad \text{Cone}(S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{R}P^{n+1}$$

$$(105) \quad \text{Cone}(S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{C}P^{n+1}$$

Beweis. (Siehe MSE, Frage 4576498) XXXX □

Beweis. Aus der Kombination zweier kokartesischer Diagramme zu einem gemeinsamen kokartesischen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \{*\} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X \times [0; 1] & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & CX \vee Y \end{array}$$

folgt für den Abbildungszyylinder einer konstanten Abbildung³:

$$(106) \quad \text{Cyl}(\text{const}: X \rightarrow Y) \cong CX \vee Y$$

□

³Dabei ist Y rechts durch dessen Bild punktiert.

Lemma 9.8. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(107) \quad \text{Cyl}(Cf) \stackrel{\text{he}}{\cong} C \text{Cyl}(f).$$

Beweis. Mit den Lemmata (XXXX) und (XXXX) ist:

$$(108) \quad \text{Cyl}(Cf) \stackrel{\text{he}}{\cong} C^2 X \vee CY \cong C(CX \vee Y) \stackrel{\text{he}}{\cong} C \text{Cyl}(f).$$

□

Lemma 9.9. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(109) \quad \text{Cyl}(f_+) \cong \text{Cone}(f) + [0; 1]$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 9.10. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen lokalkompakten Hausdorff-Räumen X und Y (sodass die Fortsetzung $f^*: X^* \rightarrow Y^*$ existiert) ist:

$$(110) \quad \text{Cyl}(f^*) \cong \text{????}$$

Beweis. XXXX

□

9.1. ABBILDUNGSZYLINDER VON KOMPOSITIONEN

Seien X, Y und Z topologische Räume sowie $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig. Aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes folgt die Existenz einer kanonischen Sequenz $Y \rightarrow \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(g \circ f) \rightarrow \text{Cyl}(g)$ stetiger Abbildungen, der *kurzen Abbildungszylinder-Sequenz*:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow (\text{id}, 0) & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times [0, 1] & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{(\text{id}, \theta)} & \text{Cyl}(g \circ f) \\
 \downarrow (f, \text{id}) & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y \times [0, 1] & \longrightarrow & & & \text{Cyl}(g)
 \end{array}$$

Für eine lange Sequenz ist noch eine verbindende Abbildung für je zwei solcher Sequenzen notwendig. Durch Kontraktion von $Z \hookrightarrow \text{Cyl}(g)$ auf einen Punkt ergibt sich CY , womit sich die Abbildungszylindersequenz für die Kegelabbildungen anschließen lässt:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{!} & \{*\} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Cyl}(g \circ f) & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & CX \times [0; 1] \\
 \downarrow & & \downarrow Cf & & \downarrow \\
 \text{Cyl}(g) & \longrightarrow & CY & \longrightarrow & \text{Cyl}(Cf)
 \end{array}$$

Korollar 9.11 (Abbildungszylinder-Sequenz). *Es ergibt sich eine lange Sequenz stetiger Abbildungen zwischen Abbildungszylindern:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) & \longrightarrow & \text{Cyl}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Cyl}(g) \\
 & & & & & \nearrow & \\
 CY & \longleftarrow & \text{Cyl}(Cf) & \longrightarrow & \text{Cyl}(C(g \circ f)) & \longrightarrow & \text{Cyl}(Cg) \\
 & & & & & \nearrow & \\
 \dots & \longleftarrow & & & & &
 \end{array}$$

9.2. ANWENDUNG DES ABBILDUNGSZYLINDERS

10. ABBILDUNGSKOZYLINDER

Der Abbildungskozyylinder ist eine topologische Konstruktion, die einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen einen topologischen Raum zuordnet. Durch die Verbindung ihrer topologischen Eigenschaften, kann statt der stetigen Abbildung stattdessen ihr Abbildungskozyylinder untersucht werden.

Die Definition des Abbildungskozyinders ist dabei dual zu der Definition (9.1) des Abbildungszylinders.

Definition 10.1 (Abbildungskozyylinder). *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist das Faserprodukt:*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cocyl}(f) & \longrightarrow & Y^{[0;1]} \\
 \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

der Abbildungskozyylinder.

Beispiel 10.2. *Für einen topologischen Raum X ist:*

(111) $\text{Cocyl}(\text{id}_X) = X^{[0;1]}$

(112) $\text{Cocyl}(X \xrightarrow{!} \{*\}) \cong X$

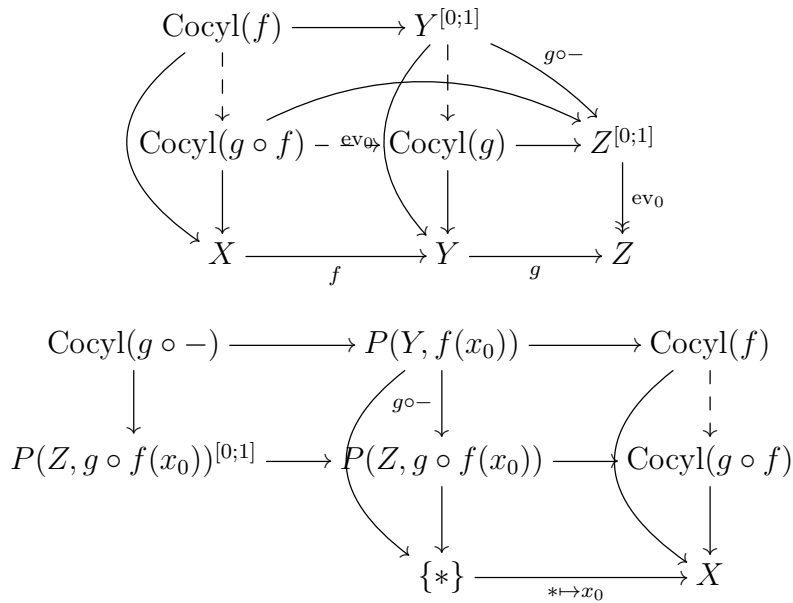
(113) $\text{Cocyl}(\{*\} \xrightarrow{* \mapsto x_0} X) = P(X, x_0)$

Die stetige Abbildung $C(Y^{[0;1]}) \rightarrow (CY)^{[0;1]}, [(\gamma, t)] \mapsto (s \mapsto [(\gamma(s), t)])$ induziert eine stetige Abbildung $C\text{Cocyl}(f) \rightarrow \text{Cocyl}(Cf)$. Die stetige Abbildung $\Sigma(Y^{[0;1]}) \rightarrow (\Sigma Y)^{[0;1]}, [(\gamma, t)] \mapsto (s \mapsto [(\gamma(s), t)])$ induziert eine stetige Abbildung $\Sigma\text{Cocyl}(f) \rightarrow \text{Cocyl}(\Sigma f)$.

10.1. ABBILDUNGSKOZYLINDER VON KOMPOSITIONEN

Seien X, Y und Z topologische Räume sowie $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig. Aus der universellen Eigenschaft des Faserproduktes folgt die Existenz einer kanonischen Sequenz $\text{Cocyl}(f) \rightarrow \text{Cocyl}(g \circ f) \rightarrow \text{Cocyl}(g) \rightarrow Y$ stetiger Abbildungen, der *kurzen*

Abbildungskozyylinder-Sequenz:



10.2. ANWENDUNG DES ABBILDUNGSKOZYLINDERS

11. ABBILDUNGSKEGEL

Der Abbildungskegel ist eine topologische Konstruktion, die einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen einen topologischen Raum zuordnet. Durch die Verbindung ihrer topologischen Eigenschaften, kann statt der stetigen Abbildung stattdessen ihr Abbildungskegel untersucht werden.

Definition 11.1 (Abbildungskegel). Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist das Kofaserprodukt:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \text{[(id,0)]} & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \text{Cone}(f) \end{array}$$

der Abbildungskegel.

Definition 11.2 (Reduzierter Abbildungskegel). Für eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) ist das Kofaserprodukt:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\ \downarrow \text{[(id,0)]} & & \downarrow \\ C(X, x_0) & \longrightarrow & \text{Cone}_*(f) \end{array}$$

der reduzierte Abbildungskegel.

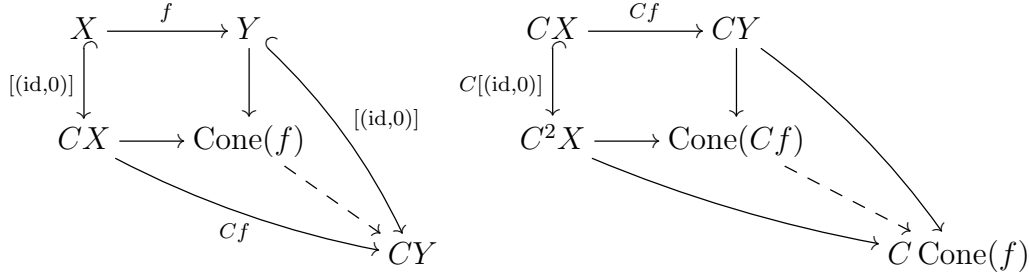
Beispiel 11.3. Kegel und Einhängung sind spezielle Abbildungskegel. Für einen topologischen Raum X ist:

(114) $\text{Cone}(\text{id}_X) = CX$

(115) $\text{Cone}(X \xrightarrow{\cdot} \{*\}) \cong \Sigma X.$

Aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes folgt: Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $\text{Cone}(f) \rightarrow CY$, sodass $Cf: CX \rightarrow CY$ und $Y \hookrightarrow CY$ über sie faktorisieren.

Wird im Diagramm in Definition (11.10) des Abbildungskegels einmal $f: X \rightarrow Y$ durch $Cf: CX \rightarrow CY$ ersetzt (wobei sich ein kokartesisches Diagramm nach $\text{Cone}(Cf)$ ergibt) und einmal C darauf angewendet (wobei sich ein kommutatives Diagramm nach $C \text{Cone}(f)$ ergibt), folgt aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes die Existenz einer kanonischen stetigen Abbildung $\text{Cone}(Cf) \rightarrow C \text{Cone}(f)$:



Lemma 11.4. Für eine Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist $\text{Cone}(f)$ zusammenziehbar.

Beweis. XXXX □

Lemma 11.5. Für eine nullhomotope stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(116) \quad \text{Cone}(f) \stackrel{\text{he}}{\cong} \Sigma X \vee Y.$$

Beweis. Aus der Kombination zweier kokartesischer Diagramme zu einem gemeinsamen kokartesischen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \{*\} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma X \vee Y \end{array}$$

folgt für den Abbildungskegel einer konstanten Abbildung⁴:

$$(117) \quad \text{Cone}(\text{const}: X \rightarrow Y) \cong \Sigma X \vee Y$$

Die Behauptung folgt aus Lemma (XXXX). □

Lemma 11.6. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(118) \quad \text{Cone}(\Sigma f) \stackrel{\text{he}}{\cong} \Sigma \text{Cone}(f).$$

Beweis. Mit den Lemmata (XXXX) und (XXXX) ist:

$$(119) \quad \text{Cone}(\Sigma f) \stackrel{\text{he}}{\cong} \Sigma^2 X \vee \Sigma Y \cong \Sigma(\Sigma X \vee Y) \stackrel{\text{he}}{\cong} \Sigma \text{Cone}(f)$$

□

Lemma 11.7. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(120) \quad \text{Cone}(f_+) \cong \text{Cone}(f) \vee [0; 1]$$

⁴Dabei ist Y rechts durch dessen Bild punktiert.

Beweis. XXXX □

Lemma 11.8. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen lokalkompakten Hausdorff-Räumen X und Y (sodass die Fortsetzung $f^*: X^* \rightarrow Y^*$ existiert) ist:

$$(121) \quad \text{Cone}(f^*) \cong \text{Cone}(f)$$

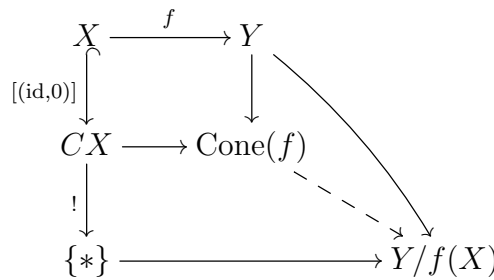
Beweis. XXXX □

Lemma 11.9. Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(122) \quad \text{Cone}(Y \rightarrow \text{Cone}(f)) \stackrel{\text{he}}{\cong} \Sigma X.$$

Beweis. XXXX □

Lemma 11.10. Für eine Kofaserung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist die kanonische stetige Abbildung $\text{Cone}(f) \rightarrow Y/f(X)$:

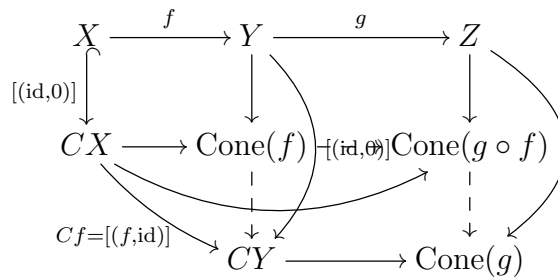


eine Homotopieäquivalenz.

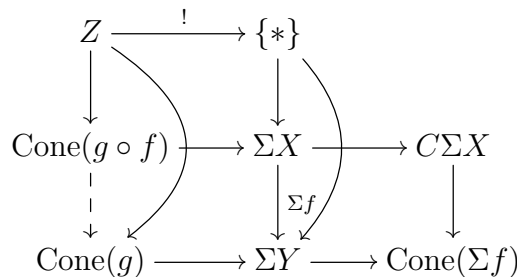
Beweis. Nach Lemma (XXXX) ist $CX \rightarrow \text{Cone}(f)$ eine Kofaserung. XXXX □

11.1. ABBILDUNGSKEGEL VON KOMPOSITIONEN

Seien X, Y und Z topologische Räume sowie $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig. Aus der universellen Eigenschaft des Kofaserproduktes folgt die Existenz einer kanonischen Sequenz $Y \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow \text{Cone}(g \circ f) \rightarrow \text{Cone}(g)$ stetiger Abbildungen, der *kurzen Abbildungskegel-Sequenz*:



Für eine lange Sequenz ist noch eine verbindende Abbildung für je zwei solcher Sequenzen notwendig. Durch Kontraktion von $Z \hookrightarrow \text{Cone}(g)$ auf einen Punkt ergibt sich ΣY , womit sich die Abbildungszyklensersequenz für die Einhängungsabbildungen anschließen lässt:



Korollar 11.11 (Lange Abbildungskegel-Sequenz). *Es ergibt sich eine lange Sequenz stetiger Abbildungen zwischen Abbildungskegeln:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & \longrightarrow & \text{Cone}(f) & \longrightarrow & \text{Cone}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Cone}(g) \\
 & & & & & \searrow & \\
 \Sigma Y & \longleftarrow & \text{Cone}(\Sigma f) & \longrightarrow & \text{Cone}(\Sigma(g \circ f)) & \longrightarrow & \text{Cone}(\Sigma g) \\
 & & & & & \searrow & \\
 \dots & \longleftarrow & & & & &
 \end{array}$$

11.2. ANWENDUNG DES ABBILDUNGSKEGELS

12. HOMOTOPIEFASERPRODUKTE

Ein Nachteil des Faserproduktes ist nach XXXX, dass selbst die Verwendung von zu den ursprünglichen homotopen Abbildungen auf ein komplett anderes, nicht einmal zum ursprünglichen homöomorphes oder homotopieäquivalentes Faserprodukt führen kann. Das Faserprodukt ist aufgrund dieser fehlenden Homotopieinvarianz daher keine ideale Konstruktion für die Homotopietheorie und muss durch eine allgemeinere Konstruktion ersetzt werden, in der die Homotopien der eingehenden Abbildungen (bis auf Homotopieäquivalenz) keine Auswirkungen mehr haben.

Definition 12.1 (Homotopiefaserprodukt). *Für einen Span $X \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} Y$ topologischer Räume ist der Limes des Diagramms $X \xrightarrow{f} A \xleftarrow{\text{ev}_0} A^{[0,1]} \xrightarrow{\text{ev}_1} A \xleftarrow{g} Y$, welcher als doppeltes Faserprodukt ausgedrückt werden kann:*

$$(123) \quad X \overset{h}{\times}_A Y := X \times_A A^{[0,1]} \times_A Y$$

wobei das entsprechende Diagramm gegeben ist durch:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \overset{h}{\times}_A Y & \longrightarrow & \text{Cocyl}(g) & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\
 \text{Cocyl}(f) & \longrightarrow & A^{[0,1]} & \xrightarrow{\text{ev}_1} & A \\
 \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 & & \\
 X & \xrightarrow{f} & A & &
 \end{array}$$

deren Homotopiefaserprodukt.

Beispiel 12.2. *Abbildungskozyliner einer stetigen Abbildung $f: A \rightarrow X$ topologischer Räume A und X ist ein spezielles Homotopiefaserprodukt durch:*

$$(124) \quad \text{Cocyl}(f) = X \overset{h}{\times}_A A.$$

Beispiel 12.3 (Homotopiefaser als Homotopiefaserprodukt). *Die Homotopiefaser ist ein spezielles Homotopiefaserprodukt. Für topologische Räume X und Y sowie einen Punkt $y_0 \in Y$ ist für die Inklusion $i: \{y_0\} \hookrightarrow Y, y_0 \mapsto y_0$:*

$$(125) \quad X \overset{h}{\times}_Y \{y_0\} = \{(x, \gamma, y_0) \in X \times Y^{[0,1]} \times \{y_0\} \mid \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = y_0\} \cong \text{Hofib}_{y_0}(f).$$

Aus den Beispielen (??) und (??) folgt, dass der Weg- und Schleifenraum spezielle Homotopiefaserprodukte sind:

Beispiel 12.4. *Wege- und Schleifenraum eines punktierten topologischen Raumes (X, x_0) sind spezielle Homotopiefaserprodukte durch:*

$$(126) \quad P(X, x_0) \cong X \times_X^h \{x_0\}$$

$$(127) \quad \Omega(X, x_0) \cong \{x_0\} \times_X^h \{x_0\}$$

Die entscheidende Eigenschaft des Homotopiefaserproduktes ist dessen Eindeutigkeit bis auf Homotopieäquivalenz bei der Betrachtung verschiedener zueinander homotoper Abbildungen.

Lemma 12.5. *Für homotope Abbildungen $f \simeq f': X \rightarrow A$ sowie $g \simeq g': Y \rightarrow A$ sind die Homotopiefaserprodukte der Spans $X \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} Y$ und $X \xrightarrow{f'} A \xleftarrow{g'} Y$ homotopieäquivalent.*

Beweis. XXXX □

Bemerkung 12.6. *Die Behauptung aus Lemma (XXXX), dass homotope Abbildungen homotopieäquivalenten Abbildungszylinder haben, ist eine direkte Folgerung aus der Kombination von Lemma (12.5) mit Beispiel (12.2).*

13. HOMOTOPIEKOFASERPRODUKTE

Ein Nachteil des Kofaserproduktes ist nach XXXX, dass selbst die Verwendung von zu den ursprünglichen homotopen Abbildungen auf ein komplett anderes, nicht einmal zum ursprünglichen homöomorphes oder homotopieäquivalentes Kofaserprodukt führen kann. Das Kofaserprodukt ist aufgrund dieser fehlenden Homotopieinvarianz daher keine ideale Konstruktion für die Homotopietheorie und muss durch eine allgemeinere Konstruktion ersetzt werden, in der die Homotopien der eingehenden Abbildungen (bis auf Homotopieäquivalenz) keine Auswirkungen mehr haben.

Definition 13.1 (Homotopiefaserprodukt). *Für einen Kospan $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ topologischer Räume ist der Kolimes des Diagramms $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{(\text{id}_A, 0)} A \times [0, 1] \xleftarrow{(\text{id}_A, 1)} A \xrightarrow{g} Y$, welcher als doppeltes Kofaserprodukt ausgedrückt werden kann:*

$$(128) \quad X \xrightarrow{h} +_A Y := X \xrightarrow{f} +_A (A \times [0, 1]) \xrightarrow{g} +_A Y$$

wobei das entsprechende Diagramm gegeben ist durch:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{g} & Y \\
 & & \downarrow (\text{id}_A, 1) & & \downarrow \\
 & & A & \xrightarrow{(\text{id}_A, 0)} & A \times [0, 1] & \longrightarrow & \text{Cyl}(g) \\
 & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) & \longrightarrow & X \xrightarrow{h} +_A Y
 \end{array}$$

deren Homotopiefaserprodukt.

Beispiel 13.2. *Abbildungszylinder und Abbildungskegel einer stetigen Abbildung $f: A \rightarrow X$ topologischer Räume A und X sind spezielle Homotopiefaserprodukte durch:*

$$(129) \quad \text{Cyl}(f) = X \xrightarrow{h} +_A A$$

$$(130) \quad \text{Cone}(f) \cong X \overset{h}{+}_A \{*\}$$

Beispiel 13.3. Zylinder und Einhängung eines topologischen Raumes X sind spezielle Homotopiekofaserprodukte durch:

$$(131) \quad CX \cong X \overset{h}{+}_X \{*\}$$

$$(132) \quad \Sigma X \cong \{*\} \overset{h}{+}_X \{*\}$$

Die entscheidende Eigenschaft des Homotopiekofaserproduktes ist dessen Eindeutigkeit bis auf Homotopieäquivalenz bei der Betrachtung verschiedener zueinander homotoper Abbildungen.

Lemma 13.4. Für homotope Abbildungen $f \simeq f': A \rightarrow X$ sowie $g \simeq g': A \rightarrow Y$ sind die Homotopiekofaserprodukte der Spans $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ und $X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{g'} Y$ homotopieäquivalent.

Beweis. XXXX □

Bemerkung 13.5. Die Behauptung aus den Lemmata (XXXX) und (XXXX), dass homotope Abbildungen homotopieäquivalenten Abbildungszylinder und -kegel haben, ist eine direkte Folgerung aus der Kombination von Lemma (13.4) mit Beispiel (13.2).

14. VERBÄNDE

14.1. GEWÖHNLICHER VERBUND

Definition 14.1 (Verbund). Für topologische Räume X und Y ist das Homotopiekofaserprodukt:

$$(133) \quad X \star Y := X \overset{h}{+}_{X \times Y} Y := (X \times Y \times [0, 1]) / \sim$$

ihre Verbund

Lemma 14.2. Der Verbund ist assoziativ bis auf Homöomorphie. Für topologische Räume X, Y und Z ist:

$$(134) \quad (X \star Y) \star Z \cong X \star (Y \star Z).$$

Beweis. XXXX

$$(135) \quad (X \star Y) \star Z \rightarrow X \star (Y \star Z), [([(x, y, s)], z, t)] \mapsto [(x, [(y, z, t)], s)]$$

□

Lemma 14.3. Der Verbund ist kommutativ bis auf Homöomorphie. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(136) \quad X \star Y \cong Y \star X.$$

Beweis. XXXX

$$(137) \quad X \star Y \rightarrow Y \star X, [(x, y, t)] \mapsto [(y, x, 1 - t)]$$

□

Lemma 14.4. Für stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: X' \rightarrow Y'$ zwischen topologischen Räumen X, Y, X' und Y' ist die Abbildung:

$$(138) \quad f * g: X * X' \rightarrow Y * Y', [(x, x', t)] \mapsto [(y, y', t)]$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. XXXX □

Lemma 14.5. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(139) \quad X \star Y = (CX \times Y) +_{X \times Y} (X \times CY)$$

Beweis. □

Für die Fundamentalgruppe des Verbundes folgt mit dem Satz von Seifert-van Kampen () sowie

$$(140) \quad \begin{aligned} \pi_1(X \star Y) &= \pi_1(CX \times Y) +_{\pi_1(X \times Y)} \pi_1(X \times CY) \\ &= \underbrace{(\pi_1(CX) \times \pi_1(Y))}_{=1} +_{\pi_1(X) \times \pi_1(Y)} (\pi_1(X) \times \underbrace{\pi_1(CY)}_{=1}) \\ &= \pi_1(X) +_{\pi_1(X) \times \pi_1(Y)} \pi_1(Y) \end{aligned}$$

Lemma 14.6. Der Kegel ist der Verbund mit dem einpunktigen Raum. Für einen topologischen Raum X ist:

$$(141) \quad CX \approx X \star \{0\}.$$

Beweis. XXXX □

Lemma 14.7. Die Einhängung ist der Verbund mit dem diskreten zweipunktigen Raum. Für einen topologischen Raum X ist:

$$(142) \quad \Sigma X \approx X \star \{0; 1\}.$$

Beweis. XXXX □

$$(143) \quad \pi_1(SX) \cong \pi_1(X \star \{0; 1\}) \cong \pi_1(X) +_{\pi_1(X) \times \pi_1(\{0; 1\})} \pi_1(\{0; 1\})$$

14.2. MILNOR-VERBUND

Lemma 14.8. Für topologische Räume X und Y sind $X \hookrightarrow X \star Y$ und $Y \hookrightarrow X \star Y$ abgeschlossene Hurewicz-Kofaserungen.

Beweis. XXXX □

Lemma 14.9. Für topologische Räume X und Y ist $X \star Y \rightarrow X \bar{\star} Y$ eine Homotopieäquivalenz. Sind X und Y kompakt, dann sogar ein Homöomorphismus.

Beweis. XXXX □

Lemma 14.10 (Koverbund). Es gibt keinen Koverbund. Für topologische Räume X und Y ist für das Homotopiefaserprodukt:

$$(144) \quad X \overset{h}{\times}_{X+Y} Y = \emptyset.$$

Beweis. XXXX □

15. FASERUNGEN UND KOFASERUNGEN

15.1. HUREWICZ-FASERUNGEN

Definition 15.1 (Hurewicz-Faserung). Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, welche für alle topologischen Räume A die (Rechts)hochhebungseigenschaft bezüglich der Inklusion $(\text{id}, 0): A \hookrightarrow A \times [0, 1]$ hat (Homotopiehochhebungseigenschaft bezüglich A):

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ (\text{id}, 0) \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

eine Hurewicz-Faserung.

Beispiel 15.2. Für einen topologischen Raum B ist die Inklusion $(\text{id}, 0): B \hookrightarrow B \times [0, 1]$ keine Hurewicz-Faserung, es gibt keine Hochhebung h mit $(\text{id}_B, 0) \circ h = (f, \text{id})$, denn für jedes $a \in A$ ist $(h(a, 1), 0) \neq (a, 1)$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ (\text{id}_A, 0) \downarrow & \nearrow \not\exists h & \downarrow (\text{id}_B, 0) \\ A \times [0, 1] & \xrightarrow{(f, \text{id})} & B \times [0, 1] \end{array}$$

Lemma 15.3. Die Komposition von Hurewicz-Faserungen ist eine Hurewicz-Faserung.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Rechtshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.4. Hurewicz-Faserungen sind stabil unter Basiswechsel.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Rechtshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.5. Jede Überlagerung ist eine Hurewicz-Faserung.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.6. Jedes Faserbündel mit einem parakompakten Hausdorff-Raum als Basisraum ist eine Hurewicz-Faserung.

Beweis. XXXX □

15.2. SERRE-FASERUNGEN

Definition 15.7 (Serre-Faserung). Für topologische Räume E und B ist eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ die (Rechts)hochhebungseigenschaft bezüglich der Inklusion $(\text{id}, 0): D^n \hookrightarrow D^n \times [0, 1]$ hat:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & E \\ (\text{id}, 0) \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^n \times [0, 1] & \longrightarrow & B \end{array}$$

eine Serre-Faserung.

Beispiel 15.8. Die kanonische Projektion $\pi: B \times F \rightarrow B$ ist eine Serre-Faserung:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & B \times F \\ \text{(id,0)} \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^n \times [0, 1] & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Lemma 15.9. Die Komposition von Serre-Faserungen ist eine Serre-Faserung.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Rechtshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.10. Serre-Faserungen sind stabil unter Basiswechsel.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Rechtshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Korollar 15.11. Jede Hurewicz-Faserung ist eine Serre-Faserung.

Lemma 15.12. Jede Serre-Faserung zwischen CW-Komplexen ist eine Hurewicz-Faserung.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.13. Jedes Faserbündel ist eine Serre-Faserung.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.14. Für eine Serre-Faserung $p: E \rightarrow B$ ist:

$$(145) \quad F_b = p^{-1}(b) \rightarrow \text{Hofib}_b(p), e \mapsto (e, \text{const}_b)$$

eine schwache Homotopieäquivalenz.

Über $F'_b = \{\gamma \in E^{[0;1]} \mid \gamma \in F_b\}$ lässt sich diese Abbildung faktorisieren als:

$$F_b \begin{array}{c} \xleftarrow{e \mapsto \text{const}_e} \\ \xrightarrow{\gamma \mapsto \gamma(1)} \\ \xrightarrow{\gamma \mapsto (\gamma(0), p \circ \gamma)} \end{array} F'_b \xrightarrow{\gamma \mapsto (\gamma(0), p \circ \gamma)} \text{Hofib}_b(p)$$

wobei die erste Abbildung ein Schnitt ist.

Beweis. □

Lemma 15.15. Für eine Serre-Faserung $p: E \rightarrow B$, eine Teilmenge $B_0 \subseteq B$ und einen Punkt $b \in B$ ist mit $E_0 = p^{-1}(B_0)$ und $e \in p^{-1}(b)$ die Abbildung:

$$(146) \quad \pi_k(p): \pi_k(E, E_0, e) \xrightarrow{\cong} \pi_k(B, B_0, b)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. XXXX □

15.3. HUREWICZ-KOFASERUNGEN

Definition 15.16 (Hurewicz-Kofaserung). Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, welche für alle topologischen Räume B die (Links)hochhebungseigenschaft bezüglich der Evaluationsabbildung $\text{ev}_0: B^{[0;1]} \rightarrow B$ hat (Homotopieerweiterungseigenschaft bezüglich B):

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B^{[0;1]} \\ f \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{ev}_0 \\ Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

eine Hurewicz-Kofaserung.

Beispiel 15.17. Für einen nicht total wegunzusammenhängenden topologischen Raum A ist die Evaluation $\text{ev}_0: A^{[0;1]} \rightarrow A$ keine Hurewicz-Kofaserung, andernfalls gäbe es eine Hochhebung h mit XXXX

$$\begin{array}{ccc} A^{[0;1]} & \xrightarrow{f \circ -} & B^{[0;1]} \\ \text{ev}_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{ev}_0 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Eine Hurewicz-Kofaserung, deren Bild abgeschlossen ist, wird *abgeschlossen* genannt.

Lemma 15.18. Die Komposition von Hurewicz-Kofaserungen ist eine Hurewicz-Kofaserung.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Linkshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.19. Hurewicz-Kofaserungen sind stabil unter Kobasiswechsel.

Dieses Lemma gilt allgemein für eine Klasse von Morphismen, welche die Linkshochhebungseigenschaft bezüglich einer anderen Klasse von Morphismen erfüllen, was durch rein kategorientheoretische Argumente in der Homotopischen Algebra beweisen lässt.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.20. Jede Hurewicz-Kofaserung ist injektiv und ein Homöomorphismus auf ihr Bild. Ist die Domäne (Bildraum) hausdorffsch, dann ist sie abgeschlossen.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.21. Für topologische Räume Y und Z gibt es für jede stetige Abbildung $g: Y \rightarrow Z$ einen topologischen Raum X und eine Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$, sodass $g \circ f: X \rightarrow Z$ eine Hurewicz-Faserung ist.

Beweis. XXXX □

Lemma 15.22. Für topologische Räume X und Z gibt es für jede stetige Abbildung $h: X \rightarrow Z$ einen topologischen Raum Y sowie:

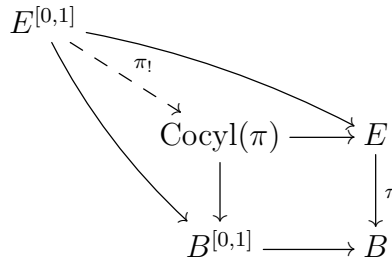
- I.) eine Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$ und eine Serre-Faserung $g: Y \rightarrow Z$ mit $h = g \circ f$.
- II.) eine Kofaserung $f: X \rightarrow Y$ und eine Homotopieäquivalenz $g: Y \rightarrow Z$ mit $h = g \circ f$.

Beweis. XXXX □

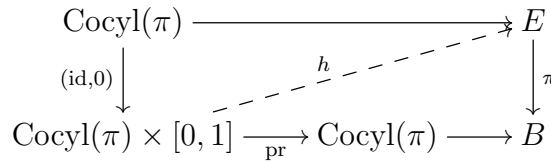
15.4. HUREWICZ-VERBINDUNGEN

Definition 15.23 (Hurewicz-Verbindung). *Für topologische Räume E und B und eine stetige Abbildung $\pi: E \rightarrow B$ ist ein stetiger Schnitt der stetigen Abbildung $\pi_!: E^{[0,1]} \rightarrow \text{Cocyl}(\pi)$ eine Hurewicz-Verbindung.*

Lemma 15.24 (Hurewicz-Verbindung). *Eine stetige Abbildung $\pi: E \rightarrow B$ zwischen topologischen Räumen E und B ist genau dann eine Hurewicz-Faserung, wenn $\pi_!: E^{[0,1]} \rightarrow \text{Cocyl}(\pi), \gamma \mapsto (\gamma(0), \pi \circ \gamma)$ eine Hurewicz-Verbindung besitzt:*



Beweis. \Rightarrow : Da π eine Hurewicz-Faserung ist, existiert eine stetige Hochhebung $h: \text{Cocyl}(\pi) \times [0, 1] \rightarrow E$ für das Diagramm:



welche unter der Adjunktion $- \times [0, 1] \dashv -^{[0,1]}$ nach XXXX einer stetigen Abbildung $\tilde{h}: \text{Cocyl}(\pi) \rightarrow E^{[0,1]}, (e, \gamma) \mapsto (t \mapsto h(e, \gamma, t))$ entspricht. Es gilt:

$$(147) \quad (\pi_! \circ \tilde{h})(e, \gamma) = \pi_!(t \mapsto h(e, \gamma, t)) = (h(e, \gamma, 0), \pi \circ h(e, \gamma, t)) = (e, \gamma),$$

wobei im letzten Schritt die beiden Eigenschaften der Hochhebung, also $h(-, -, 0) = (\text{Cocyl}(\pi) \rightarrow E)$ und $\pi \circ h(-, -, t) = (\text{Cocyl}(\pi) \rightarrow B)$, benutzt wurden.

\Leftarrow : Sei $s: \text{Cocyl}(\pi) \rightarrow E^{[0,1]}$ eine Hurewicz-Verbindung (also stetiger Schnitt) von $\pi_!: E^{[0,1]} \rightarrow \text{Cocyl}(\pi)$, dann entspricht diese unter der Adjunktion $- \times [0, 1] \dashv -^{[0,1]}$ nach XXXX einer stetigen Abbildung $\tilde{s}: \text{Cocyl}(\pi) \times [0, 1] \rightarrow E, (e, \gamma, t) \mapsto s(e, \gamma)(t)$. \square

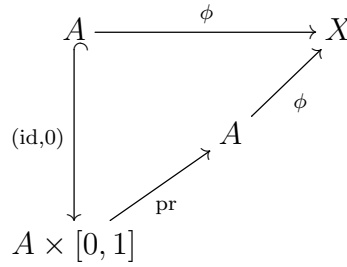
16. MODELLSTRUKTUREN AUF **Top**

16.1. STRØM-MODELLSTRUKTUR AUF **Top**

Definition 16.1 (Strøm-Modellstruktur auf **Top**). *Auf der Kategorie **Top** der topologischen Räume bilden die Klasse der Homotopieäquivalenzen als schwachen Äquivalenzen, Hurewicz-Faserungen als Faserungen und abgeschlossenen Hurewicz-Kofaserungen als Kofaserungen, die Strøm-Modellstruktur mit welcher die Kategorie als **Top_{St}** notiert wird.*

Lemma 16.2. *In der Strøm-Modellstruktur ist jeder topologische Raum fasernd.*

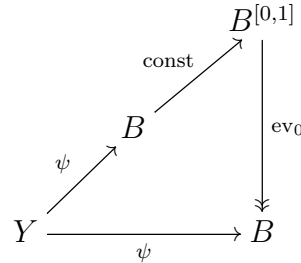
Beweis. Sei X ein topologischer Raum. Sei A ein weiterer topologischer Raum und $\phi: A \rightarrow X$ stetig, dann gibt es eine Hochhebung:



womit X fasernd ist. □

Lemma 16.3. *In der Ström-Modellstruktur ist jeder topologische Raum kofasernd.*

Beweis. Sei Y ein topologischer Raum. Sei B ein weiterer topologischer Raum und $\psi: Y \rightarrow B^{[0,1]}$ stetig, dann gibt es eine Hochhebung:



womit Y kofasernd ist. □

16.2. QUILLEN-MODELLSTRUKTUR AUF \mathbf{Top}

Definition 16.4 (Quillen-Modellstruktur auf \mathbf{Top}). *Auf der Kategorie \mathbf{Top} der topologischen Räume bilden die Klasse der schwachen Homotopieäquivalenzen als schwachen Äquivalenzen und Serre-Faserungen als Faserungen die Quillen-Modellstruktur mit welcher die Kategorie als \mathbf{Top}_{Qu} notiert wird.*

Da Hurewicz-Faserungen nach Korollar (15.11) insbesondere Serre-Faserungen und Homotopieäquivalenzen nach Korollar (??) insbesondere schwache Homotopieäquivalenzen sind, erhält der Identitätsfunktors $\text{Id}: \mathbf{Top}_{\text{St}} \rightarrow \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$ sowohl Faserungen als auch triviale Faserungen. Es ergibt sich eine Quillen-Adjunktion:

$$\mathbf{Top}_{\text{St}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Id}} \\ \perp_{\text{Qu}} \\ \xrightarrow{\text{Id}} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$$

Korollar 16.5. *In der Quillen-Modellstruktur ist jeder topologische Raum fasernd.*

16.3. GEMISCHTE MODELLSTRUKTUR AUF \mathbf{Top}

Definition 16.6 (Gemischte Modellstruktur auf \mathbf{Top}). *Auf der Kategorie \mathbf{Top} der topologischen Räume bilden die Klasse der schwachen Homotopieäquivalenzen als schwachen Äquivalenzen und Hurewicz-Faserungen als Faserungen, die gemischte Modellstruktur mit welcher die Kategorie als $\mathbf{Top}_{\text{mix}}$ notiert wird.*

Der Identitätsfunktors $\text{Id}: \mathbf{Top}_{\text{mix}} \rightarrow \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$ erhält triviale Faserungen per Definition und ebenso Faserungen, da Hurewicz-Faserungen nach Korollar (15.11) insbesondere Serre-Faserungen sind. Der Identitätsfunktors $\text{Id}: \mathbf{Top}_{\text{St}} \rightarrow \mathbf{Top}_{\text{mix}}$ erhält Faserungen

per Definition und ebenso triviale Faserungen, da Homotopieäquivalenzen nach Korollar (??) insbesondere schwache Homotopieäquivalenzen sind. Es ergeben sich Quillen-Adjunktionen:

$$\mathbf{Top}_{\text{St}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Id}} \\ \xrightarrow[\text{Id}]{\perp_{\text{Qu}}} \\ \xleftarrow{\text{Id}} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{mix}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Id}} \\ \xrightarrow[\text{Id}]{\perp_{\text{Qu}}} \\ \xleftarrow{\text{Id}} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$$

16.3.1. M-FASERNDE UND M-KOFASERNDE RÄUME

Korollar 16.7. *In der gemischten Modellstruktur ist jeder topologische Raum fasernd.*

Definition 16.8 (m-kofasernder Raum). *Ein topologischer Raum, welcher kofasernd in der gemischten Modellstruktur ist, wird m-kofasernd genannt.*

Lemma 16.9 (m-kofasernder Raum). *Ein topologischer Raum ist genau dann m-kofasernd, wenn er homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 16.10. *Für einen kompakten Hausdorff-Raum X und einen m-kofasernden Raum Y ist $C_{\text{co}}(X, Y)$ ein m-kofasernder Raum.*

Beweis. XXXX □

17. FASERBÜNDEL VON SPHÄREN

Lemma 17.1. *Für ein Faserbündel $S^k \rightarrow S^m \rightarrow S^n$ ist $k = n - 1$ und $m = 2n - 1$.*

Beweis. XXXX □

(148) $\pi_i(S^2) = \pi_i(S^3) \oplus \pi_{i-1}(S^1)$

(149) $\pi_i(\mathbb{S}^4) = \pi_i(\mathbb{S}^7) \oplus \pi_{i-1}(S^3)$

(150) $\pi_i(\mathbb{S}^8) = \pi_i(S^{15}) \oplus \pi_{i-1}(\mathbb{S}^7)$

(151) $\pi_{30}(S^{16}) \neq \pi_{30}(S^{31}) \oplus \pi_{29}(S^{32})$

Korollar 17.2. *Die höheren Homotopiegruppen der 2- und 3-Sphäre sind isomorph:*

(152) $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3), k \geq 3.$

Es gibt kein Faserbündel:

(153) $S^{15} \rightarrow S^{31} \rightarrow S^{16},$

da XXXX.

18. SCHWARZ-GENUS

XXXX

19. TOPOLOGISCHE KOMPLEXITÄT

19.1. TOPOLOGISCHE KOMPLEXITÄT VON TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

Definition 19.1 (Topologische Komplexität). XXXX

Beispiel 19.2. Es ist $\text{TC}(\mathbb{R}P^2) = 3$, $\text{TC}(\mathbb{C}P^2) = \text{TC}(\overline{\mathbb{C}P^2}) = 4$ und $\text{TC}(S^2 \times S^2) = 4$. [?]

Beispiel 19.3. Die topologische Komplexität der Kleinschen Flasche ist 5. [?]

Lemma 19.4. Für eine Faserung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist:

$$(154) \quad \xi_f: X^I \rightarrow X \times Y, \gamma \mapsto (\gamma(0), f(\gamma(1)))$$

eine Faserung.

Beweis. XXX □

Definition 19.5 (Topologische Komplexität einer stetigen Abbildung). Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist

$$(155) \quad \text{TC}(f) := g(\xi_f)$$

seine topologische Komplexität.

Definition 19.6 (Topologische Komplexität eines topologischen Raumes). Für einen topologischen Raum X ist die topologische Komplexität seiner Identität:

$$(156) \quad \text{TC}(X) := \text{TC}(\text{id}_X)$$

seine topologische Komplexität.

Korollar 19.7. Ein top. Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn $\text{TC}(X) = 1$.

Lemma 19.8. Für die topologische Komplexität der Sphären gilt [?, Thrm. 8]:

$$(157) \quad \text{TC}(S^n) = \begin{cases} 2 & ; n \text{ ungerade} \\ 3 & ; n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Beweis. XXXX □

Da die ∞ -Sphäre nach Lemma (XXXX) zusammenziehbar ist, folgt mit Lemma (??):

Korollar 19.9. Für die topologische Komplexität der ∞ -Sphäre gilt:

$$(158) \quad \text{TC}(S^\infty) = 1.$$

Lemma 19.10. Für die topologische Komplexität von Produkten gleicher Sphären gilt [?, Thrm. 13]:

$$(159) \quad \text{TC}((S^m)^n) = \begin{cases} n + 1 & ; m \text{ ungerade} \\ 2n + 1 & ; m \text{ gerade} \end{cases} .$$

Beweis. XXXX □

Für $m = 1$ folgt insbesondere die topologische Komplexität der Tori:

$$(160) \quad \text{TC}(T^n) = n + 1.$$

Lemma 19.11. *Für die topologische Komplexität der Σ -Flächen gilt [?, Thrm. 9]:*

$$(161) \quad \text{TC}(\Sigma_g) = \begin{cases} 3 & ; g \leq 1 \\ 5 & ; g > 1 \end{cases} .$$

Beweis. $g = 0$: Es ist $\Sigma_0 = S^2$ und daher $\text{TC}(\Sigma_0) = \text{TC}(S^2) = 3$ nach Lemma (19.11).
 $g = 1$: Es ist $\Sigma_1 = T^2$ und daher $\text{TC}(\Sigma_1) = \text{TC}(T^2) = 3$ nach Gleichung (160). $g > 1$:
 XXXX □

Lemma 19.12. *Für die topologische Komplexität von verbundenen Summen gleicher reel projektiver Räume gilt [?, Thrm. 1.3]:*

$$(162) \quad \text{TC}((\mathbb{R}P^m)^{\#n}) = \begin{cases} \text{XXXX} & ; \text{XXXX} \\ 2m & ; m, n \geq 2 \end{cases} .$$

Beweis. XXXX □

Für $m = 2$ folgt insbesondere die topologische Komplexität der Ξ -Flächen [?, Thrm. 2]:

$$(163) \quad \text{TC}(\Xi_h) = \begin{cases} 3 & ; h = 1 \\ 4 & ; h \geq 2 \end{cases} .$$

Lemma 19.13. *Für die topologische Komplexität einer $2n$ -dimensionalen einfach zusammenhängenden geschlossenen symplektischen Mannigfaltigkeit X gilt [?, Thrm. 1]:*

$$(164) \quad \text{TC}(X) = 2n + 1.$$

Beweis. XXXX □

Korollar 19.14. *Für die topologische Komplexität von komplex projektiven Räume gilt [?, Crl. 2]:*

$$(165) \quad \text{TC}(\mathbb{C}P^n) = 2n + 1.$$

Lemma 19.15. *Die topologische Komplexität der Kleinschen Flasche ist 4 [?, Thrm. 1].*

Beweis. XXXX □

Lemma 19.16. *Für die topologische Komplexität der Konfigurationsräume der euklidischen Räume gilt [?]:*

$$(166) \quad \text{TC}(\text{Conf}(\mathbb{R}^m, n)) = \begin{cases} 2n - 1 & ; m \text{ ungerade} \\ 2n - 2 & ; m \text{ gerade} \end{cases} .$$

Beweis. XXXX □

Lemma 19.17. *Für eine Homotopierechtsinverse $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y (also eine stetige Abbildung, sodass eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ existiert), gilt [?, Thrm. 3]:*

$$(167) \quad \text{TC}(X) \leq \text{TC}(Y).$$

Beweis. XXXX □

Korollar 19.18. *Homotopieäquivalente topologische Räume haben die gleiche topologische Komplexität.*

Lemma 19.19. Für wegzusammenhängende metrische Räume X und Y gilt [?, Thm. 11]:

$$(168) \quad \text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y) + 1.$$

Beweis. XXXX □

19.2. TOPOLOGISCHE KOMPLEXITÄT VON STETIGEN ABBILDUNGEN

XXXX

19.3. TOPOLOGISCHE KOMPLEXITÄT VON GRUPPEN

Definition 19.20. Für eine Gruppe G ist:

$$(169) \quad \text{TC}(G) := \text{TC}(\mathcal{B}G)$$

ihre topologische Komplexität.

Definition 19.21. Für einen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen Gruppen G und H ist:

$$(170) \quad \text{TC}(\phi) := \text{TC}(\mathcal{B}\phi)$$

seine topologische Komplexität.

20. LUSTERNIK–SCHNIRELMANN-KATEGORIE

20.1. LUSTERNIK–SCHNIRELMANN-KATEGORIE VON TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

Definition 20.1 (Lusternik–Schnirelmann-Kategorie). XXXX

Beispiel 20.2. Es ist $\text{cat}(\mathbb{R}P^2) = 2$, $\text{cat}(\mathbb{C}P^2) = \text{cat}(\overline{\mathbb{C}P^2}) = 2$ und $\text{cat}(S^2 \times S^2) = 2$. [?]

Korollar 20.3. Ein top. Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn $\text{cat}(X) = 1$.

Lemma 20.4. Für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie der Sphären gilt:

$$(171) \quad \text{cat}(S^n) = 2.$$

Beweis. XXXX □

Da die ∞ -Sphäre nach Lemma (XXXX) zusammenziehbar ist, folgt mit Lemma (??):

Korollar 20.5. Für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie der ∞ -Sphäre gilt:

$$(172) \quad \text{cat}(S^\infty) = 1.$$

Lemma 20.6. Für $n \geq 2k$ ist [?, Thm. 1.3.]:

$$(173) \quad \text{cat } V_k(\mathbb{R}^n) = \text{cat } V_k(\mathbb{H}^n) = k$$

mit der in [?] benutzten Konvention $\text{cat}(*) = 0$.

Lemma 20.7. Es ist [?, Thm. 1]:

$$(174) \quad \text{cat } V_k(\mathbb{C}^n) = k + 1$$

mit der in [?] benutzten Konvention $\text{cat}(*) = 1$.

Lemma 20.8. *Für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie der unitären und speziellen unitären Gruppe gilt [?, Thm. 1]:*

$$(175) \quad \text{cat } \mathbf{U}(n) = n + 1;$$

$$(176) \quad \text{cat } \mathbf{SU}(n) = n.$$

mit der in [?] benutzten Konvention $\text{cat}(\ast) = 1$.

Lemma 20.9. *Für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie von XXXX gilt [?, Thm. 1.1, 1.1']:*

$$(177) \quad \text{cat } \mathbf{S}\Lambda(n) = \text{cat}(\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)) = n - 1;$$

$$(178) \quad \text{cat}(\mathbf{SU}(2n)/\mathbf{Sp}(n)) = n - 1;$$

$$(179) \quad \text{cat } \Lambda(n) = \text{cat}(\mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)) = n;$$

$$(180) \quad \text{cat}(\mathbf{U}(2n)/\mathbf{Sp}(n)) = n.$$

mit der in [?] benutzten Konvention $\text{cat}(\ast) = 0$.

20.2. LUSTERNIK–SCHNIRELMANN-KATEGORIE VON STETIGEN ABBILDUNGEN XXXX

20.3. LUSTERNIK–SCHNIRELMANN-KATEGORIE VON GRUPPEN

Definition 20.10. *Für eine Gruppe G ist:*

$$(181) \quad \text{cat}(G) := \text{cat}(\mathcal{B}G)$$

ihre Lusternik–Schnirelmann-Kategorie.

Definition 20.11. *Für einen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen Gruppen G und H ist:*

$$(182) \quad \text{cat}(\phi) := \text{cat}(\mathcal{B}\phi)$$

seine Lusternik–Schnirelmann-Kategorie.

20.4. GANEA-VERMUTUNG

Lemma 20.12. *Für eine Homotopierechtsinverse $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y (also eine stetige Abbildung, sodass eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ existiert), gilt [?, Prop. 1.1]:*

$$(183) \quad \text{cat}(X) \leq \text{cat}(Y).$$

Beweis. XXXX □

Korollar 20.13. *Homotopieäquivalente topologische Räume haben die gleiche Lusternik–Schnirelmann-Kategorie.*

Lemma 20.14. *Für wegzusammenhängende und parakompakte topologische Räume X und Y gilt [?, Prop. 2.3]:*

$$(184) \quad \text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y).$$

Beweis. XXXX □

21. SYMMETRISCHES PRODUKT

Das symmetrische Produkt sowie das *unendliche symmetrische Produkt* sind Konstruktionen, welche die symmetrischen Gruppen bei der Bildung von Produkten berücksichtigen.

Definition 21.1 (Symmetric product). *Für einen topologischen Raum X ist der topologische Raum:*

$$(185) \quad {}^n(X) = X^n / \text{Sym}_n$$

dessen symmetrisches Produkt.

Definition 21.2 (Unendliches symmetrisches Produkt). *Für einen topologischen Raum X ist der topologische Raum:*

$$(186) \quad (X) = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^n(X)$$

dessen unendliches symmetrisches Produkt.

22. DOLD–THOM–THEOREM

Der *Satz von Dold–Thom* ist ein Resultat, welches ähnlich wie der Satz von Hurewicz aus XXXX die Homotopie- und Homologiegruppen verbindet. Doch es gibt zwei entscheidende Unterschiede: Statt der Verbindung der Invarianten des gleichen Raumes ist die Verwendung des symmetrischen Produktes notwendig. Zudem gilt es statt in nur wenigen speziellen Graden sogar in allen Graden.

Aus der Perspektive der Kategorientheorie behauptet der Satz von Dold–Thom, dass der Funktor der reduzierten singulären Homologiegruppe über den Funktor der Homotopiegruppe faktorisiert.

Satz 22.1 (Satz von Dold–Thom). *Für einen zusammenhängenden CW-Komplex X ist:*

$$(187) \quad \tilde{H}_n(X) \cong \pi_n \text{SP}(X).$$

Beweis. XXXX □

Der Satz von Dold–Thom ist mit dem Hurewicz-Homomorphismus kompatibel. Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex, dann induziert die kanonische Inklusion $X \cong \text{SP}^1(X) \hookrightarrow \text{SP}(X)$ einen Gruppenhomomorphismus $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n \text{SP}(X) \cong \tilde{H}_n(X, \mathbb{Z})$, welcher genau der Hurewicz-Homomorphismus ist.

TEIL 2. HOMOTOPIETHEORIE

23. HOMOTOPIEN

Definition 23.1 (Homotopie). XXXX

24. HOMOTOPIEÄQUIVALENZEN

Definition 24.1 (Homotopieäquivalenz). XXXX

Lemma 24.2. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. XXXX □

24.1. KOMPABILITÄT MIT TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN

Homotopieäquivalenzen gehören zu den wichtigsten Abbildungen der Topologie und den wichtigsten Methoden zur Untersuchung von topologischen Räumen. Daher ist es wichtig zu überprüfen, welche topologischen Eigenschaften unter diesen erhalten bleiben und welche nicht.

Lemma 24.3. *Hausdorffigkeit bleibt unter Homotopieäquivalenzen erhalten. Für homotopieäquivalente topologische Räume X und Y ist X genau dann hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ stetig mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Sei X hausdorffsch ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Seien $y, y' \in Y$ verschiedene Punkte. XXXX \square

Lemma 24.4. *Regularität bleibt unter Homotopieäquivalenzen erhalten. Für homotopieäquivalente topologische Räume X und Y ist X genau dann regulär, wenn Y regulär ist.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ stetig mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Sei X regulär ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Sei $A \subset Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $y \in A^c$. XXXX \square

Lemma 24.5. *Normalheit bleibt unter Homotopieäquivalenzen erhalten. Für homotopieäquivalente topologische Räume X und Y ist X genau dann normal, wenn Y normal ist.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ stetig mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Sei X normal ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Seien $A, B \subset Y$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. XXXX \square

Lemma 24.6. *Kompaktheit bleibt unter Homotopieäquivalenzen erhalten. Für homotopieäquivalente topologische Räume X und Y ist X genau dann kompakt, wenn Y kompakt ist.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ stetig mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Sei X kompakt ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y , dann ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(U_i))_{i \in I' \subseteq I}$. XXXX \square

25. H-RÄUME

Definition 25.1 (H-Raum). *Ein topologischer Raum X , ein Element $e \in X$ und eine stetige Abbildung $\mu: X \times X \rightarrow X$, sodass $\mu(-, e) \simeq \text{id}_X$ und $\mu(e, -) \simeq \text{id}_X$, sind ein H-Raum (X, e, μ) .*

Korollar 25.2. *Topologische Gruppen sind H-Räume.*

Lemma 25.3. *Die Fundamentalgruppe eines H-Raumes ist abelsch.*

Beweis. Sei (X, e, μ) ein H-Raum und seien $\gamma, \delta \in \Omega(X, e)$. Sei $H: [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow X$, $(s, t) \mapsto \mu(\gamma(s), \delta(t))$, dann ist:

$$(188) \quad H(s, 0) = \mu(\gamma(s), e) \simeq \gamma(s)$$

$$(189) \quad H(s, 1) = \mu(\gamma(s), e) \simeq \gamma(s)$$

$$(190) \quad H(0, t) = \mu(e, \delta(t)) \simeq \delta(t)$$

$$(191) \quad H(1, t) = \mu(e, \delta(t)) \simeq \delta(t)$$

\square

Lemma 25.4. *Wenn $n \neq 1, 2, 4, 8$, dann ist S^{n-1} kein H-Raum. [?, Thrm. 1.1.1. a)].*

Wenn $n \neq 1, 2, 4, 8$, dann ist S^{n-1} mit Korollar (??) insbesondere keine topologische Gruppe. Wenn $n = 1, 2, 4, 8$, dann ist S^{n-1} eine topologische Gruppe. Es ist $S^0 \cong \mathbb{Z}_2$, $S^1 \cong U(1)$ und $S^3 \cong SU(2)$. S^7 XXXX.

Für einen H-Raum (X, μ, e) ist die Hopf-Konstruktion der Verknüpfung $\mu: X \times X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung $H_\mu: X * X \rightarrow \Sigma X$.

26. ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN

Lemma 26.1. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(192) \quad \forall x, y \in X: x \sim y \Leftrightarrow \exists_{\gamma \in C([0,1], X)} : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

eine Äquivalenzrelation auf X .

Beweis. □

Für ein $x \in X$ wird $[x]$ dessen *Wegzusammenhangskomponente* genannt. Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X wird als:

$$(193) \quad \pi_0(X) := |X / \sim|$$

bezeichnet.

Lemma 26.2. *Für topologische Räume X und Y sowie eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$(194) \quad \pi_0 f: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y), [x] \mapsto [f(x)],$$

eine wohldefinierte Abbildung zwischen Mengen.

Beweis. Seien $x, x' \in X$ mit $[f(x)] = [f(x')]$, dann $\exists \gamma \in C([0, 1], Y): \gamma(0) = f(x) \wedge \gamma(1) = f(x')$. Die Abbildung $f^{-1} \circ \gamma$ ist als Komposition stetiger Abbildungen offenbar stetig. □

Für einen punktierten topologischen Raum X ist offenbar $\pi_0 \text{id}_X = \text{id}_{\pi_0(X)}$ und für topologische Räume X, Y und Z sowie stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt offenbar $\pi_0(g \circ f) = \pi_0 g \circ \pi_0 f$.

Korollar 26.3. *Die Wegzusammenhangskomponente:*

$$(195) \quad \pi_0: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, X \mapsto \pi_0(X), f \mapsto \pi_0 f$$

ist ein kovarianter Funktor.

27. WEG- UND SCHLEIFENRAUM

Der reduzierte Kegel $C(X, x_0)$ ist mit $[(x_0, 0)]$ ein punktierter topologischer Raum. Es gibt eine kanonische Abbildung:

$$(196) \quad \pi: (X, x_0) \hookrightarrow (C(X, x_0), [(x_0, 0)]), x \mapsto [(x, 0)]$$

Lemma 27.1. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ genau dann nullhomotop relativ y_0 , wenn sie (mit π) über $C(X, x_0)$ faktorisiert, also eine stetige punktierte Abbildung $f': (C(X, x_0), [(x_0, 0)]) \rightarrow (Y, y_0)$ mit $f = f' \circ \pi$ existiert.*

Beweis. \Rightarrow : Eine punktierte Homotopie $H: (X, x_0) \times [0; 1] \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen $f = H(-, 0)$ und $\text{const}_{y_0} = H(-, 1)$ entspricht einer stetigen punktierten Abbildung:

$$(197) \quad f': (C(X, x_0), [(x_0, 0)]) \rightarrow (Y, y_0), [(x, t)] \mapsto H(x, t),$$

wobei für alle $x \in X$ jeweils $(f' \circ \pi)(x) = f'([(x, 0)]) = H(x, 0) = f(x)$.

\Leftarrow : Eine stetige punktierte Abbildung $f': (C(X, x_0), [(x_0, 0)]) \rightarrow (Y, y_0)$ entspricht einer punktierten Homotopie:

$$(198) \quad H: (X, x_0) \times [0; 1] \rightarrow (Y, y_0), (x, t) \mapsto f'([(x, t)])$$

zwischen $f = f' \circ \pi = f'([(x_0, 0)]) = H(-, 0)$ und $\text{const}_{y_0} = f'([(-, 1)]) = H(-, 1)$, da für alle $x \in X$ jeweils $f'([(x, 1)]) = f'([(x_0, 0)]) = y_0$. \square

27.1. WEGRAUM

Definition 27.2 (Wegraum). *Für einen punktierten topologischen Raum (Y, y_0) ist:*

$$(199) \quad P(Y, y_0) := C([0; 1], 0, (Y, y_0)) = \{\gamma \in C([0; 1], Y) \mid \gamma(0) = y_0\}$$

dessen Wegraum.

Der Wegraum $P(Y, y_0)$ ist mit const_{y_0} ein punktierter topologischer Raum. Es gibt eine kanonische Abbildung:

$$(200) \quad \pi: (P(Y, y_0), \text{const}_{y_0}) \rightarrow (Y, y_0), \gamma \mapsto \gamma(1)$$

Lemma 27.3. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ genau dann nullhomotop relativ y_0 , wenn sie (mit π) über $P(Y, y_0)$ faktorisiert, also eine stetige punktierte Abbildung $f': (X, x_0) \rightarrow (P(Y, y_0), \text{const}_{y_0})$ mit $f = \pi \circ f'$ existiert.*

Beweis. \Rightarrow : Eine punktierte Homotopie $H: (X, x_0) \times [0; 1] \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen $\text{const}_{y_0} = H(-, 0)$ und $f = H(-, 1)$ entspricht einer stetigen punktierten Abbildung:

$$(201) \quad f': (X, x_0) \rightarrow (P(Y, y_0), \text{const}_{y_0}), x \mapsto (t \mapsto H(x, t)),$$

wobei für alle $x \in X$ jeweils $(\pi \circ f')(x) = \pi(t \mapsto H(x, t)) = H(x, 1) = f(x)$.

\Leftarrow : Eine stetige punktierte Abbildung $f': (X, x_0) \rightarrow (P(Y, y_0), \text{const}_{y_0})$ entspricht einer punktierten Homotopie:

$$(202) \quad H: (X, x_0) \times [0; 1] \rightarrow (Y, y_0), (x, t) \mapsto f'(x)(t)$$

zwischen $\text{const}_{y_0} = f'(-)(0) = H(-, 0)$, da für alle $x \in X$ jeweils $f'(x)(0) = y_0$, und $f = f' \circ \pi = f'(-)(1) = H(-, 1)$. \square

Beispiel 27.4. *Nach Lemma (XXXX) ist jeder Weg $\gamma: ([0; 1], 0) \rightarrow (Y, y_0)$ nullhomotop relativ y_0 . Da für jedes $s \in [0; 1]$ die Abbildung $([0; 1], 0) \rightarrow ([0; 1], 0), t \mapsto st$ stetig ist, ist die entsprechende Faktorisierung:*

$$(203) \quad \gamma: ([0; 1], 0) \xrightarrow{s \mapsto (t \mapsto \gamma(st))} (P(Y, y_0), \text{const}_{y_0}) \xrightarrow{\pi: \gamma \mapsto \gamma(1)} (Y, y_0).$$

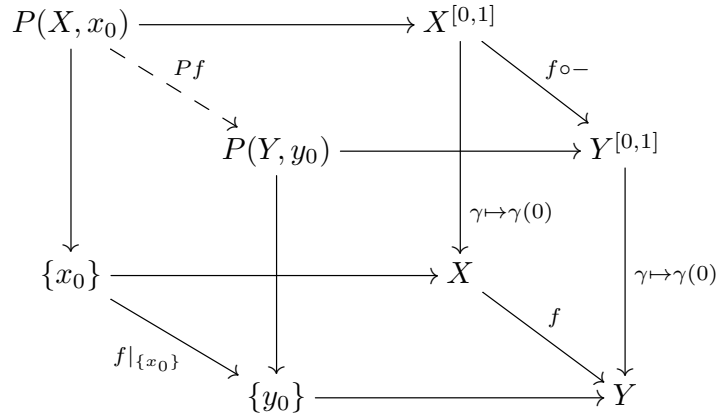
27.2. INDUZIERTER WEGRAUMABBILDUNG

Lemma 27.5 (Induzierte Wegabbildung). *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist:*

$$(204) \quad Pf: P(X, x_0) \rightarrow P(Y, y_0), \gamma \mapsto f \circ \gamma,$$

stetig.

Beweis. (Mit Kategorientheorie.) Die induzierte Wegabbildung wird durch die universelle Eigenschaft des Faserproduktes nach Lemma (XXXX) induziert: \square



27.3. SCHLEIFENRAUM MIT BASISPUNKT

Definition 27.6 (Weg und Schleife). Für einen topologischen Raum X wird eine Abbildung $\gamma \in C([0, 1], X)$ Weg genannt. Ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ wird Schleife genannt.

Eine spezielle Schleife ist die konstante Schleife $\forall t \in [0, 1]: \epsilon_x(t) = x$. Für jede Schleife γ ist $\bar{\gamma}$ mit $\forall t \in [0, 1]: \bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$ die rückwärts abgelaufene Schleife.

Eine Schleife kann alternativ auch als stetige Abbildung $\gamma: (S^1, *) \rightarrow (X, x)$ definiert werden.

Definition 27.7 (Schleifenraum mit Basispunkt). Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist:

$$(205) \quad \Omega(X, x_0) := C((S^1, *), (X, x_0)) = \{\gamma \in C([0; 1], X) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

dessen Schleifenraum.

Der Schleifenraum $\Omega(X, x_0)$ wird mit der Kompakt-Offen-Topologie und dem Basispunkt ϵ_{x_0} wieder zu einem punktierten topologischen Raum. Der Schleifenraum lässt sich als Kofaserprodukt ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(X, x_0) & \xrightarrow{\quad} & X^{[0;1]} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \\
 \{x_0\} & \xrightarrow{x_0 \mapsto (x_0, x_0)} & X \times X
 \end{array}$$

Der Schleifenraum wird mit der Verknüpfung:

$$(206) \quad *: \Omega(X, x) \times \Omega(X, x) \rightarrow \Omega(X, x), (\gamma, \delta) \mapsto \gamma * \delta = \begin{cases} \gamma(2t) & ; 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t - 1) & ; 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

zu einem Magma. Die Verknüpfung ist nicht assoziativ und kommutativ. Die jeweiligen Schleifen laufen zwar die gleichen Punkte ab, aber zu verschiedenen Geschwindigkeiten bzw. in verschiedener Reihenfolge.

$$(207) \quad ((\gamma * \delta) * \epsilon)(t) = \begin{cases} \gamma(4t) & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \delta(4t - 1) & ; \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \epsilon(2t - 1) & ; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \neq (\gamma * (\delta * \epsilon))(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(4t - 2) & ; \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \epsilon(4t - 3) & ; \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(208) \quad \gamma * \delta = \begin{cases} \gamma(2t) & ; 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & ; 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \neq \delta * \gamma = \begin{cases} \delta(2t) & ; 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & ; 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definition 27.8 (Homotopie von Schleifen). Für einen punktierten topologischen Raum (X, x) und Schleifen $\gamma, \delta \in \Omega(X, x)$ ist eine stetige Abbildung:

$$(209) \quad H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit $H(0, -) = \gamma$ und $H(1, -) = \delta$ eine Homotopie zwischen diesen.

Existiert für zwei Schleifen $\gamma, \delta \in \Omega(X, x)$ eine Homotopie zwischen diesen werden sie *homotop* genannt, notiert als $\gamma \sim \delta$. Eine Schleife $\gamma \in \Omega(X, x)$, die homotop zur Schleife ϵ_x ist, wird *nullhomotop* genannt.

Lemma 27.9. Die Homotopie zwischen Schleifen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Relation ist *reflexiv* mit $\gamma \sim \gamma$ aufgrund der stetigen Homotopie $H(s, t) = \gamma(t)$ und *symmetrisch*, da wenn $\gamma \sim \delta$ gilt und eine stetige Homotopie $H(t, s)$ mit $H(t, 0) = \gamma(t)$ und $H(t, 1) = \delta(t)$ existiert auch die stetige Homotopie $H'(t, s) = H(t, 1-s)$ existiert mit $H'(t, 0) = H(t, 1) = \delta(t)$ und $H'(t, 1) = H(t, 0) = \gamma(t)$, womit $\delta \sim \gamma$. \square

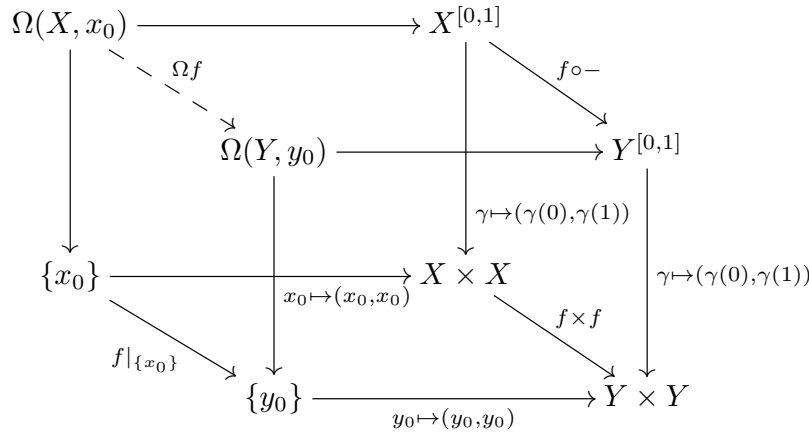
27.4. INDUZIERTE SCHLEIFENABBILDUNG

Lemma 27.10 (Induzierte Schleifenabbildung). Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist:

$$(210) \quad \Omega f: \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0), \gamma \mapsto f \circ \gamma,$$

stetig.

Beweis. (Mit Kategorientheorie.) Die induzierte Schleifenabbildung wird durch die universelle Eigenschaft des Faserproduktes nach Lemma (XXXX) induziert: XXXX \square



Die induzierte Schleifenabbildung ist sogar ein Magmahomomorphismus. Seien $\gamma, \delta \in \Omega(X, x_0)$ zwei Schleifen, dann folgt mit XXXX:

$$(211) \quad \Omega f(\gamma * \delta) = f \circ (\gamma * \delta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \delta) = \Omega f(\gamma) * \Omega f(\delta).$$

Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt offenbar $\Omega \text{id}_{(X, x_0)} = \text{id}_{\Omega(X, x_0)}$ und für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) sowie stetige Abbildungen $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ gilt offenbar $\Omega(g \circ f) = \Omega g \circ \Omega f$.

Korollar 27.11. Der Schleifenraum:

$$(212) \quad \Omega: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*, (X, x_0) \mapsto (\Omega(X, x_0), \epsilon_{x_0}), f \mapsto \Omega f$$

ist ein kovarianter Funktor.

27.5. SCHLEIFENRAUM OHNE BASISPUNKT

Definition 27.12 (Schleifenraum ohne Basispunkt). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(213) \quad \mathcal{L}X := C(S^1, X)$$

dessen Schleifenraum.

Der Schleifenraum $\mathcal{L}X$ wird mit der Kompakt-Offen-Topologie wieder zu einem topologischen Raum.

28. FUNDAMENTALGRUPPEN

Definition 28.1 (Fundamentalgruppe). *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x) ist der Quotientenraum seines Schleifenraumes unter der Äquivalenzrelation der Homotopie:*

$$(214) \quad \pi_1(X, x) := \Omega(X, x) / \sim$$

seine Fundamentalgruppe.

Die Fundamentalgruppe kann alternativ auch als die Homotopieklasse $[(S^1, *), (X, x)]$ definiert werden.

Satz 28.2. *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x) wird dessen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ mit der Verknüpfung:*

$$(215) \quad *: \pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x), [\gamma] * [\delta] = [\gamma * \delta]$$

tatsächlich zu einer Gruppe $(\pi_1(X, x), *, [\epsilon_x])$.

Beweis. Dies folgt aus der stetigen Homotopie:

$$(216) \quad H(t, s) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{4t}{s+1}\right) & ; 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \delta(4t - s - 1) & ; \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \epsilon\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & ; \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mit $H(t, 0) = ((\gamma * \delta) * \epsilon)(t)$ und $H(t, 1) = (\gamma * (\delta * \epsilon))(t)$.

Dies folgt aus der stetigen Homotopie:

$$(217) \quad H(t, s) = \begin{cases} \epsilon_x(t) & ; 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \gamma\left(\frac{2t-s}{2-s}\right) & ; \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mit $H(t, 0) = \gamma(t)$ und $H(t, 1) = (\gamma * \epsilon_x)(t)$.

Dies folgt aus der stetigen Homotopie:

$$(218) \quad H(t, s) = \begin{cases} \gamma(2ts) & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\gamma}(2(t-1)s+1) & ; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mit $H(t, 0) = \epsilon_x(t)$ und $H(t, 1) = (\gamma * \bar{\gamma})(t)$. \square

Satz 28.3. *Homotopieäquivalente wegzusammenhängende topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Homotopieäquivalenzen induzieren Fundamentalgruppenisomorphismen.*

Insbesondere sind für homöomorphe topologische Räume ihre Fundamentalgruppen isomorph.

Beweis. Seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume und seien $f: X \rightarrow Y$ sowie $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. XXXX \square

Bei einem wegzusammenhängenden topologischen Raum X kann der Basispunkt in der Fundamentalgruppe weggelassen werden, da für Punkte $x_1, x_2 \in X$ und einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$ ein Gruppenisomorphismus:

$$(219) \quad \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_2), [\delta] \mapsto [\gamma * \delta * \bar{\gamma}]$$

existiert. Dieser ist wohldefiniert, da für $\delta \sim \varepsilon$ mit Homotopie H auch $\gamma * \delta * \bar{\gamma} \sim \gamma * \varepsilon * \bar{\gamma}$ mit Homotopie $\gamma * H * \bar{\gamma}$. Für wegzusammenhängende topologische Räume X wird daher bis auf Isomorphie nur $\pi_1(X)$ geschrieben.

Lemma 28.4. *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist.*

Beweis. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. \Rightarrow : XXXX \Leftarrow : XXXX \square

Satz 28.5. *Homotope Abbildungen induzieren den gleichen Fundamentalgruppenhomomorphismus.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ homotop. Sei $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g und sei $\gamma \in \Omega(X, x)$ beliebig, dann ist $H \circ (\gamma, \text{id}_{[0,1]}): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$, da $\forall t \in [0, 1]$:

$$(220) \quad (H \circ (\gamma, \text{id}_{[0,1]}))(t, 0) = H(\gamma(t), 0) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$

$$(221) \quad (H \circ (\gamma, \text{id}_{[0,1]}))(t, 1) = H(\gamma(t), 1) = g(\gamma(t)) = (g \circ \gamma)(t)$$

\square

Lemma 28.6. *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt:*

$$(222) \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega(X, x_0))$$

Beweis. \square

28.1. INDUZIERTER FUNDAMENTALABBILDUNG

Lemma 28.7 (Induzierte Fundamentalabbildung). *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist:*

$$(223) \quad \pi_1 f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma],$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Lemma (XXXX). Seien $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(X, x_0)$ zwei Homotopieklassen, jeweils repräsentiert durch stetige Abbildungen $\gamma, \delta: S^1 \rightarrow (X, x_0)$, dann folgt mit Lemma (XXXX):

$$(224) \quad \begin{aligned} \pi_1 f([\gamma] * [\delta]) &= \pi_1 f([(\gamma \vee \delta) \circ p_1]) = [f \circ (\gamma \vee \delta) \circ p_1] \\ &= [((f \circ \gamma) \vee (f \circ \delta)) \circ p_1] = [f \circ \gamma] * [f \circ \delta] = \pi_1 f([\gamma]) * \pi_1 f([\delta]). \end{aligned}$$

\square

Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt offenbar $\pi_1 \text{id}_{(X, x_0)} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ und für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) sowie stetige Abbildungen $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ gilt offenbar $\pi_1(g \circ f) = \pi_1 g \circ \pi_1 f$.

Korollar 28.8. *Die Fundamentalgruppe:*

$$(225) \quad \pi_1: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}, (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0), f \mapsto \pi_1 f$$

ist ein kovarianter Funktor.

28.2. BERECHNUNG DER FUNDAMENTALGRUPPE

Lemma 28.9. Für die Wirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist:

$$(226) \quad \pi_1(X/G) \cong G$$

Beweis. □

Satz 28.10. Die Fundamentalgruppe kommutiert mit endlichen Produkten. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(227) \quad \pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

Beweis. Die (surjektiven) Projektionen $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ induzieren nach Lemma (??) jeweils (surjektive) Gruppenhomomorphismen $\pi_1(\text{pr}_X): \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1(X)$ und $\pi_1(\text{pr}_Y): \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1(Y)$. XXXX □

Für eine topologische Gruppe G ergibt sich aus diesem Satz eine weitere Gruppenverknüpfung $\circ: \pi_1(G) \times \pi_1(G) \cong \pi_1(G \times G) \xrightarrow{\pi_1(\circ)} \pi_1(G)$.

Lemma 28.11. Für eine topologische Gruppe G gilt:

$$(228) \quad \bigvee_{a,b,c,d} : (a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Beweis. □

Lemma 28.12. Die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe ist abelsch.

Beweis. Sei (G, \circ, e) eine topologische Gruppe. □

Lemma 28.13. Für topologische Räume X, Y und Z mit Z lokalkompakt gilt:

$$(229) \quad (X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

Beweis. □

28.3. FUNDAMENTALGRUPPE DER 1-SPHÄRE

Lemma 28.14. Für $n > 1$ ist $\pi_n(S^1) \cong 1$.

Beweis. XXXX □

$$(230) \quad \pi_k(S^3) = \pi_k(S^2), k \geq 3$$

Da $\pi_0(S^2) \cong \pi_0(S^3) \cong 1$ und $\pi_1(S^2) \cong \pi_1(S^3) \cong 1$ nach XXXX ist sogar:

$$(231) \quad \pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3), k \neq 2.$$

Jedoch ist $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ nach XXXX und $\pi_2(S^3) \cong 1$ nach XXXX.

29. SEIFERT-VAN KAMPEN-THEOREM

Theorem 29.1 (Seifert-van Kampen-Theorem). *Für einen punktierten topologischen Raum $(X, *)$ und wegzusammenhängende offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $*$ $\in U \cap V$ und $U \cap V$ wegzusammenhängend ist:*

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & V \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_2 \\ U & \xrightarrow{j_1} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, *) & \xrightarrow{\pi_1(i_1)} & \pi_1(V, *) \\ \downarrow \pi_1(i_2) & & \downarrow \pi_1(j_2) \\ \pi_1(U, *) & \xrightarrow{\pi_1(j_1)} & \pi_1(X, *) \end{array}$$

Beweis.

□

$$(232) \quad \pi_1(S^n) \cong \pi_1(D^n) *_{\pi_1(S^{n-1})} \pi_1(D^n)$$

Satz 29.2. *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist die Fundamentalgruppe ihres Wedge-Produkts:*

$$(233) \quad \pi_1(X \vee Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$$

Beweis. Sei $U \subset X$ eine offene Umgebung von x_0 und $V \subset Y$ eine offene Umgebung von y_0 , dann sind $U \vee Y$ und $X \vee V$ offene Umgebungen von (x_0, y_0) .

$$(234) \quad \pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(U \vee Y) *_{\pi_1(U \vee V)} \pi_1(X \vee V)$$

□

Es ist $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$, womit nach Lemma (??):

Korollar 29.3. *Für die Fundamentalgruppe des reellen Vektorraumes gilt:*

$$(235) \quad \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$$

Korollar 29.4. *Für die Fundamentalgruppe des projektiven reellen Vektorraumes gilt mit Lemma (??):*

$$(236) \quad \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \pi_1(S^n/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Lemma 29.5. *Für die Fundamentalgruppe der Sphären gilt:*

$$(237) \quad \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

$$(238) \quad \pi_1(S^n) = 0, n > 1$$

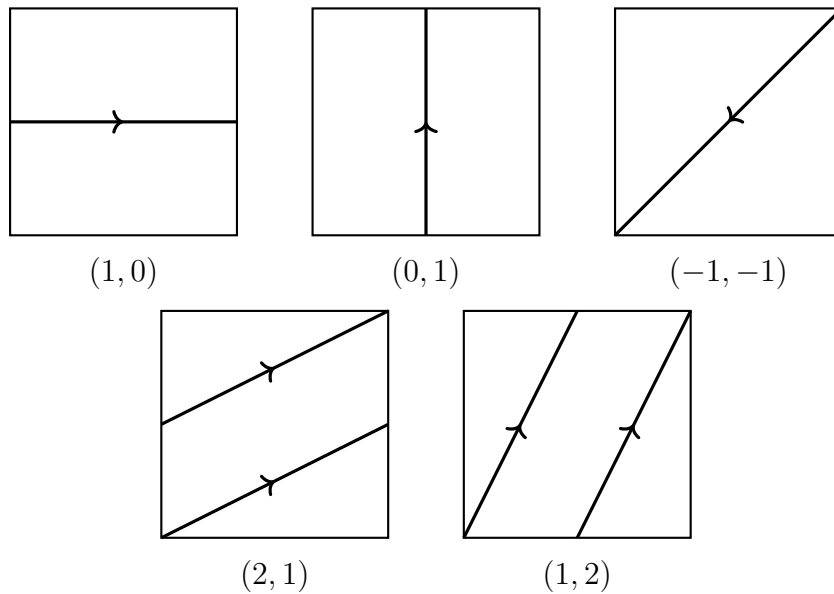
Korollar 29.6. Für die Fundamentalgruppe des Torus gilt mit Satz (??):

$$(239) \quad \pi_1(T^n) = \pi_1((S^1)^n) = \pi_1(S^1)^n = \mathbb{Z}^n$$

oder mit Satz (??) und Lemma (??):

$$(240) \quad \pi_1(T^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \cong \mathbb{Z}^n$$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ des 2-Torus T^2 kann dabei veranschaulicht werden, indem dieser als Quadrat dargestellt wird, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils in gleicher Orientierung miteinander identifiziert werden. Die erste ganze Zahl gibt dabei die Anzahl der Überquerungen von der rechten zur linken Kante und die zweite Zahl die Anzahl der Überquerungen von der oberen zur unteren Kante an. Eine Umkehrung der Pfeilrichtung führt dabei zum Vorzeichenwechsel beider ganzer Zahlen.



30. HOMOTOPIEGRUPPEN

Definition 30.1 (Homotopiegruppe). Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist die Homotopieklasse:

$$(241) \quad \pi_n(X, x_0) := [(S^n, *), (X, x_0)] = C((S^n, *), (X, x_0)) / \sim_{homotop}, n \geq 2$$

seine n -te Homotopiegruppe.

$$(242)$$

$$\gamma +_k \delta: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0), (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} \gamma(t_1, \dots, t_{k-1}, 2t_k, t_{k+1}, \dots, t_n) & ; 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(t_1, \dots, t_{k-1}, 2t_k - 1, t_{k+1}, \dots, t_n) & ; 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(243) \quad -_k \gamma: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0), (t_1, \dots, t_n) \mapsto \gamma(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - t_k, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

Satz 30.2. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) wird dessen n -te Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ mit der Verknüpfung:

$$(244) \quad *: \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), ???$$

tatsächlich zu einer abelschen Gruppe $(\pi_n(X, x_0), *, ???)$.

Beweis. □

Satz 30.3. Homotopieäquivalente topologische Räume haben gleiche Konnektivität.

Das verallgemeinert Satz (??) und (??) im Skript *Topologie*.

Beweis. Seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume und seien $f: X \rightarrow Y$ sowie $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. XXXX \square

Satz (??) lässt sich verallgemeinern zu:

Satz 30.4. *Homotopieäquivalente topologische Räume haben isomorphe Homotopiegruppen. Homotopieäquivalenzen induzieren Homotopiegruppenisomorphismen.*

Beweis. Seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume. XXXX \square

Satz (??) lässt sich verallgemeinern zu:

Satz 30.5. *Homotope Abbildungen induzieren den gleichen Homotopiegruppenhomomorphismus.*

Beweis. Seien X und Y topologische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ homotop. XXXX \square

Definition 30.6 (Äquivalenzen). *Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) wird eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$:*

- I.) n -Äquivalenz genannt, wenn $\forall k < n$ jeweils $\pi_k(f)$ ein Isomorphismus ist und $\pi_n(f)$ ein Epimorphismus (surjektiver Homomorphismus) ist.
- II.) schwache Äquivalenz genannt, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ jeweils $\pi_n(f)$ ein Isomorphismus ist.

Aus den Sätzen (XXXX), (??) und (??) folgt:

Korollar 30.7. *Homotopieäquivalenzen sind schwache Homotopieäquivalenzen.*

Lemma 30.8. *Für ein n -zusammenhängendes Paar (X, Y) wegzusammenhängender Räume ist $H_i(X, Y; G) \cong 1$ und $H_i(X, Y; G) \cong 1$ für jede Gruppe G .*

Beweis. XXXX \square

Lemma 30.9. *Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn $H_n^{\text{sing}}(f): H_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bijektiv ist. [?, Prop. 4.21.]*

Beweis. XXXX \square

Lemma 30.10. *Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn $H_{\text{sing}}^n(f): H_{\text{sing}}^n(Y) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bijektiv ist. [?, Prop. 4.21.]*

Beweis. XXXX \square

Lemma 30.11. *Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz bzw. Homotopieäquivalenz, wenn für alle CW-Komplexe bzw. topologischen Räume A die induzierte Abbildung $[A, X] \rightarrow [A, Y]$ bijektiv ist.*

Beweis. XXXX \square

Definition 30.12 (n -zusammenhängend). *Ein topologischer Raum X , für den $\forall k \leq n: \pi_k(X) = 1$, wird n -zusammenhängend genannt.*

0-zusammenhängend ist damit wegzusammenhängend und 1-zusammenhängend ist einfach zusammenhängend.

Satz 30.13. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt:

$$(245) \quad \pi_{n+1}(X, x_0) \cong \pi_n(\Omega(X, x_0))$$

Das verallgemeinert Lemma (??).

Beweis. □

30.1. INDUZIERTER HOMOTOPIEABBILDUNG

Lemma 30.14 (Induzierte Homotopieabbildung). Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sowie eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist:

$$(246) \quad \pi_n f: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0), [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Lemma (XXXX). Seien $[\gamma], [\delta] \in \pi_n(X, x_0)$ zwei Homotopieklassen, jeweils repräsentiert durch stetige Abbildungen $\gamma, \delta: S^n \rightarrow (X, x_0)$, dann folgt mit Lemma (XXXX):

$$(247) \quad \begin{aligned} \pi_n f([\gamma] + [\delta]) &= \pi_n f([\gamma \vee \delta] \circ p_n) = [f \circ (\gamma \vee \delta) \circ p_n] \\ &= [((f \circ \gamma) \vee (f \circ \delta)) \circ p_n] = [f \circ \gamma] + [f \circ \delta] = \pi_n f([\gamma]) + \pi_n f([\delta]). \end{aligned}$$

□

Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) gilt offenbar $\pi_n \text{id}_{(X, x_0)} = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ und für punktierte topologische Räume (X, x_0) , (Y, y_0) und (Z, z_0) sowie stetige Abbildungen $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ gilt offenbar $\pi_n(g \circ f) = \pi_n g \circ \pi_n f$.

Korollar 30.15. Die Fundamentalgruppe:

$$(248) \quad \pi_n: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{AbGrp}, (X, x_0) \mapsto \pi_n(X, x_0), f \mapsto \pi_n f$$

ist ein kovarianter Funktor.

30.2. BERECHNUNG DER HOMOTOPIEGRUPPE

Satz 30.16. Die Homotopiegruppe kommutiert mit endlichen Produkten. Für topologische Räume X und Y ist:

$$(249) \quad \pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y).$$

Das verallgemeinert Satz (??).

Beweis. Die (surjektiven) Projektionen $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ induzieren nach Lemma (??) jeweils (surjektive) Gruppenhomomorphismen $\pi_n(\text{pr}_X): \pi_n(X \times Y) \rightarrow \pi_n(X)$ und $\pi_n(\text{pr}_Y): \pi_n(X \times Y) \rightarrow \pi_n(Y)$. XXXX □

30.3. HOMOTOPIEGRUPPEN DER 1-SPHÄRE

Lemma 30.17. Für $n > 1$ ist $\pi_n(S^1) \cong 1$.

Beweis. XXXX □

30.4. GENERALISIERTE HOMOTOPIEGRUPPEN

Für einen topologischen Raum X lässt sich bei dessen Einhängung ΣX (hier mit der Konvention von $X \times [-1, 1]$, bei dem $X \times \{-1\}$ und $X \times \{1\}$ jeweils auf einen Punkt kollabiert werden) der Äquator $X \times \{0\}$ auf einen Punkt kollabieren, was die Wedge-Summe von ΣX mit sich selbst ergibt.

$$(250) \quad p_X: \Sigma X \rightarrow \Sigma X / (X \times \{0\}) \cong \Sigma X \vee \Sigma X$$

Lemma 30.18. *Für punktierte topologische Räume X und Y ist $[\Sigma X, Y]$ mit der Verknüpfung:*

$$(251) \quad +: [\Sigma X, Y] \times [\Sigma X, Y] \rightarrow [\Sigma X, Y], ([f], [g]) \mapsto [(f \vee g) \circ p_X]$$

eine Gruppe.

Beweis. XXXX □

Lemma 30.19. *Für punktierte topologische Räume X und Y ist $[\Sigma X, Y]$ abelsch, wenn X eine Einhängung ist oder Y ein H -Raum ist.*

Beweis. XXXX □

Lemma 30.20. *Für einen punktierten topologischen Raum X und einen assoziativen H -Raum (Y, μ, e) ist $[X, Y]$ mit der Verknüpfung:*

$$(252) \quad +: [X, Y] \times [X, Y] \rightarrow [X, Y], ([f], [g]) \mapsto [\mu \circ (f, g)]$$

eine Gruppe.

Beweis. XXXX □

31. WHITEHEAD-PRODUKT

31.1. GEWÖHNLICHES WHITEHEAD-PRODUKT

Homotopiegruppen verfügen in jedem Grad $n \geq 1$ unter Verwendung der Kollapsabbildung $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ des Äquators der n -Sphäre S^n über eine Verknüpfung, welche diese zu einer Gruppe macht. Unter Verwendung einer anderen Kollapsabbildung $S^{k+l-1} \rightarrow S^k \vee S^l$ können sogar Homotopieklassen verschiedener Grade $k, l \geq 1$ miteinander verknüpft werden.

Lemma 31.1. *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist die von der Einhängung induzierte Abbildung $\Sigma: \pi_n(X) \rightarrow \pi_{n+1}(\Sigma X), [f] \mapsto [\Sigma f]$ zwischen Homotopiegruppen ein Gruppenhomomorphismus.*

Die Abbildung ist dabei nach Lemma (XXXX) wohldefiniert.

Beweis. Für Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow X$ sowie die Kollapsabbildung $p_n: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ und $p_{n+1}: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1} \vee S^{n+1}$ ist:

$$(253) \quad \Sigma(f + g) = \Sigma((f \vee g) \circ p_n) = \Sigma(f \vee g) \circ \Sigma p_n \simeq (\Sigma f \vee \Sigma g) \circ p_{n+1} = \Sigma f + \Sigma g$$

□

$$(254) \quad S^{k+l-1} = \partial(D^{k+l}) \cong \partial(D^k \times D^l) \cong S^{k-1} \times D^l \cup D^k \times S^{l-1}$$

Lemma 31.2. *Für einen topologischen Raum X sowie Homotopieklassen $f \in \pi_k(X)$ und $g \in \pi_l(X)$ ist $[f, g]_{\text{Wh}} = 0$ genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $h: S^k \times S^l \rightarrow X$ mit $f = h \circ i_1$ und $g = h \circ i_2$ gibt.*

Beweis. \Rightarrow : XXXX. \Leftarrow : XXXX. □

Lemma 31.3 (Linearität des Whitehead-Produktes). *Das Whitehead-Produkt kommutiert mit den Verknüpfungen der Homotopiegruppen. Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X und Abbildungen $f, g \in \pi_k(X)$ und $h, i \in \pi_l(X)$ ist:*

$$(255) \quad [f + g, h]_{\text{Wh}} = [f, h]_{\text{Wh}} + [g, h]_{\text{Wh}};$$

$$(256) \quad [f, h + i]_{\text{Wh}} = [f, h]_{\text{Wh}} + [f, i]_{\text{Wh}}.$$

Beweis. XXXX □

Lemma 31.4 (Graduierte Symmetrie des Whitehead-Produktes). *Das Whitehead-Produkt ist graduiert symmetrisch. Für einen topologischen Raum X sowie Homotopieklassen $f \in \pi_k(X)$ und $g \in \pi_l(X)$ ist:*

$$(257) \quad [f, g]_{\text{Wh}} = (-1)^{kl} [g, f]_{\text{Wh}}.$$

Beweis. XXXX □

Lemma 31.5 (Graduierte Jacobi-Identität des Whitehead-Produktes). *Das Whitehead-Produkt erfüllt eine graduierte Jacobi-Identität. Für einen topologischen Raum X sowie Homotopieklassen $f \in \pi_k(X)$, $g \in \pi_l(X)$ und $h \in \pi_m(X)$ ist:*

$$(258) \quad (-1)^{km} [f, [g, h]_{\text{Wh}}]_{\text{Wh}} + (-1)^{kl} [g, [h, f]_{\text{Wh}}]_{\text{Wh}} + (-1)^{lm} [h, [f, g]_{\text{Wh}}]_{\text{Wh}} = 0.$$

Beweis. XXXX □

Das Whitehead-Produkt der Identitäten auf der 1-Sphäre S^1 hängt mit der reellen Hopf-Faserung $h_{\mathbb{R}}$ zusammen:

$$(259) \quad [\text{id}_{S^1}, \text{id}_{S^1}]_{\text{Wh}} = \text{????} h_{\mathbb{R}} \in \pi_1(S^1)$$

Das Whitehead-Produkt der Identitäten auf der 2-Sphäre S^2 hängt mit der komplexen Hopf-Faserung $h_{\mathbb{C}}$ zusammen:

$$(260) \quad [\text{id}_{S^2}, \text{id}_{S^2}]_{\text{Wh}} = 2h_{\mathbb{C}} \in \pi_3(S^2)$$

Das Whitehead-Produkt der Identitäten auf der 4-Sphäre S^4 hängt mit der quaternionischen Hopf-Faserung $h_{\mathbb{H}}$ zusammen:

$$(261) \quad [\text{id}_{S^4}, \text{id}_{S^4}]_{\text{Wh}} = \text{????} h_{\mathbb{H}} \in \pi_7(S^4)$$

Das Whitehead-Produkt der Identitäten auf der 8-Sphäre S^8 hängt mit der oktonionischen Hopf-Faserung $h_{\mathbb{O}}$ zusammen:

$$(262) \quad [\text{id}_{S^8}, \text{id}_{S^8}]_{\text{Wh}} = \text{????} h_{\mathbb{O}} \in \pi_{15}(S^8)$$

31.2. GENERALISIERTES WHITEHEAD-PRODUKT

$$(263) \quad [-, -]_{\text{wh}}: [\Sigma X, Z] \times [\Sigma Y, Z] \rightarrow [X \star Y, Z]$$

Mit $X = S^{k-1}$ und $Y = S^{l-1}$ ergibt sich mit $\Sigma X = \Sigma S^{k-1} \cong S^k$ bzw. $\Sigma Y = \Sigma S^{l-1} \cong S^l$ nach Lemma (XXXX) sowie $S^{k-1} \star S^{l-1} \cong S^{k+l-1}$ nach Lemma (XXXX) das gewöhnliche Whitehead-Produkt.

Für zwei punktierte stetige Abbildungen $f: \Sigma X \rightarrow Z$ und $g: \Sigma Y \rightarrow Z$ gibt es durch die Adjunktion $\Sigma \dashv \Omega$ mit Einheit $\eta: 1 \Rightarrow \Omega \Sigma$ und Koeinheit $\varepsilon: \Sigma \Omega \Rightarrow 1$ entsprechende Abbildungen $\tilde{f} = \Omega f \circ \eta_X: X \rightarrow \Omega Z$ und $\tilde{g} = \Omega g \circ \eta_Y: Y \rightarrow \Omega Z$. Deren Produkt $\tilde{f} \times \tilde{g}: X \times Y \rightarrow \Omega Z \times \Omega Z$ lässt sich nun mit der Kompositionen $\mu_{\Omega Z}: \Omega Z \times \Omega Z \rightarrow \Omega Z$ von Wegen aus Gleichung (XXXX), welche ΩZ zu einem H-Raum macht, komponieren. Von der Komposition $\mu_{\Omega Z} \circ (\tilde{f} \times \tilde{g}): X \times Y \rightarrow \Omega Z$ lässt sich die Hopf-Konstruktion $H(\mu_{\Omega Z} \circ (\tilde{f} \times \tilde{g})): X \star Y \rightarrow \Sigma \Omega Z$ bilden, welche mit $\varepsilon_Z: \Sigma \Omega Z \rightarrow Z$ komponiert werden kann.

$$(264) \quad [f, g]_{\text{wh}} = \varepsilon_Z \circ \Sigma \mu_{\Omega Z} \circ \Sigma(\Omega f \times \Omega g) \circ \Sigma(\eta_X \times \eta_Y) \circ H'_{X,Y}$$

$$(265) \quad [\text{id}_{\Sigma X}, \text{id}_{\Sigma X}]_{\text{wh}} = [\varepsilon_{\Sigma X} \circ \Sigma \mu_{\Omega \Sigma X} \circ \Sigma(\eta_X \times \eta_X) \circ H'_{X,X}] \in [X \star X, \Sigma X]$$

Das Whitehead-Produkt lässt sich mit der Hopf-Invariante zu einer XXXX der ganzen Zahlen kombinieren.

$$(266) \quad \begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n) \times \pi_n(S^n) &\xrightarrow{[-, -]_{\text{wh}}} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{\text{Hopf}} \mathbb{Z}, \\ (h, k) &\mapsto hk \text{ Hopf } ([\text{id}_{S^n}, \text{id}_{S^n}]_{\text{wh}}) \end{aligned}$$

Satz 31.6. *Es gilt:*

$$(267) \quad \text{Hopf } ([\text{id}_{S^n}, \text{id}_{S^n}]_{\text{wh}}) = \text{????}.$$

Beweis. XXXX □

32. (KO)ZUSAMMENHÄNGENDE ABBILDUNGEN

Definition 32.1 (*n*-zusammenhängender Raum). *Ein punktierter topologischer Raum (X, x_0) , für den $\pi_i(X, x_0) = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$, wird *n*-zusammenhängend genannt.*

Die größte natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die (X, x_0) *n*-zusammenhängend ist, ist die *Konnektivität* $\text{conn}(X, x_0)$ von (X, x_0) .

Beispiel 32.2. *Die Sphäre S^n ist $n - 1$ -zusammenhängend.*

Satz 32.3. *Ein *n*-zusammenhängender topologischer Raum ist *n*-homologisch zusammenhängend, also $H_i^{\text{sing}}(X) = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$.*

Beweis. XXXX □

Definition 32.4 (*n*-zusammenhängende Abbildung). *Für punktierte topologische Räume X und Y wird eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung $\pi_i(f): \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ für alle $i < n$ bijektiv und für $i = n$ surjektiv ist, *n*-zusammenhängend genannt.*

Eine ∞ -zusammenhängende Abbildung, die also Bijektionen zwischen allen Homotopiegruppen induziert, wird *schwache Homotopieäquivalenz* genannt.

Korollar 32.5. *Homotopieäquivalenzen und daher insbesondere Homöomorphismen sind schwache Homotopieäquivalenzen.*

Definition 32.6 (schwach zusammenziehbar). *Ein topologischer Raum X , für den die terminale Abbildung $X \rightarrow \{*\}$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist, also für den sämtliche Homotopiegruppen trivial sind, wird schwach zusammenziehbar genannt.*

Definition 32.7 (n -kozusammenhängende Abbildung). *Für punktierte topologische Räume X und Y wird eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung $\pi_i(f): \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ für alle $i > n$ bijektiv und für $i = n$ injektiv ist, n -kozusammenhängend genannt.*

Jede stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist ∞ -kozusammenhängend.

Korollar 32.8. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung ist genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn sie n -zusammenhängend und n -kozusammenhängend ist.*

Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine kurze Sequenz von topologischen Räumen.

Lemma 32.9. *Es gilt:*

- I.) *Sind f und g n -zsmh., dann ist $g \circ f$ n -zsmh..*
- II.) *Ist $g \circ f$ n -zsmh. und g $n + 1$ -zsmh., dann ist f n -zsmh..*
- III.) *Ist $g \circ f$ n -zsmh. und f $n - 1$ -zsmh., dann ist g n -zsmh..*

Beweis. I.): Für $i < n$ sind $\pi_i(f)$ und $\pi_i(g)$ bijektiv, womit $\pi_i(g \circ f) = \pi_i(g) \circ \pi_i(f)$ bijektiv ist. $\pi_n(f)$ und $\pi_n(g)$ sind surjektiv, womit $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ surjektiv ist.

II.), III.): Für $i < n$ ist $\pi_i(g \circ f) = \pi_i(g) \circ \pi_i(f)$ bijektiv, womit $\pi_i(f)$ injektiv und $\pi_i(g)$ surjektiv ist. $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ ist surjektiv, womit $\pi_n(g)$ surjektiv ist.

II.): Für $i < n$ ist $\pi_i(g)$ injektiv, womit $\pi_i(f)$ nach Lemma (2) surjektiv ist. $\pi_n(g)$ ist injektiv⁵, womit $\pi_n(f)$ nach Lemma (2) surjektiv ist.

III.): Für $i < n$ ist $\pi_i(f)$ surjektiv, womit $\pi_i(g)$ nach Lemma (1) injektiv ist. \square

Insbesondere folgt aus diesem Lemma, dass schwache Homotopieäquivalenzen die 2-*aus-3-Eigenschaft* haben: Sind zwei der drei Abbildungen f , g und $g \circ f$ schwache Homotopieäquivalenzen, dann sind es alle. Mit Korollar (??) folgt:

Korollar 32.10. *Mit der Klasse der schwachen Homotopieäquivalenzen ist **Top** eine Kategorie mit schwachen Äquivalenzen.*

Lemma 32.11. *Es gilt:*

- I.) *Sind f und g n -kozsmh., dann ist $g \circ f$ n -kozsmh..*
- II.) *Ist $g \circ f$ n -kozsmh. und g $n + 1$ -kozsmh., dann ist f n -kozsmh..*
- III.) *Ist $g \circ f$ n -kozsmh. und f $n - 1$ -kozsmh., dann ist g n -kozsmh..*

Beweis. I.) Für $i > n$ sind $\pi_i(f)$ und $\pi_i(g)$ bijektiv, womit $\pi_i(g \circ f) = \pi_i(g) \circ \pi_i(f)$ bijektiv ist. $\pi_n(f)$ und $\pi_n(g)$ sind injektiv, womit $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ injektiv ist.

II.), III.): Für $i > n$ ist $\pi_i(g \circ f) = \pi_i(g) \circ \pi_i(f)$ bijektiv, womit $\pi_i(f)$ injektiv und $\pi_i(g)$ surjektiv ist. $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ ist injektiv, womit $\pi_n(f)$ injektiv ist.

II.): Für $i > n$ ist $\pi_i(g)$ injektiv, womit $\pi_i(f)$ nach Lemma (2) surjektiv ist.

III.): Für $i > n$ ist $\pi_i(f)$ surjektiv, womit $\pi_i(g)$ nach Lemma (1) injektiv ist. $\pi_n(f)$ ist surjektiv⁶, womit $\pi_n(g)$ nach Lemma (2) injektiv ist. \square

Lemma 32.12. *Für topologische Räume X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann n -zusammenhängend, wenn alle ihre Homotopiefasern $n-1$ -zusammenhängend sind.*

⁵ g n -zsmh. würde hier surjektiv garantieren und reicht daher nicht aus.

⁶ g n -kozsmh. würde hier injektiv garantieren und reicht daher nicht aus.

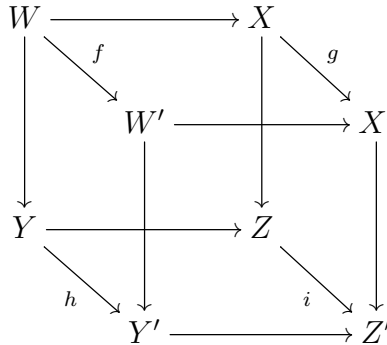
Beweis. XXXX □

Lemma 32.13. Für topologische Räume X und Y sowie eine Kofaserung $f: X \rightarrow Y$ gilt:

- I.) Ist f n -zusammenhängend, dann ist Y/X n -zusammenhängend.
- II.) Ist X n -zusammenhängend, dann ist $Y \rightarrow Y/X$ $n - 1$ -zusammenhängend.
- III.) Ist f eine schwache Homotopieäquivalenz, dann ist Y/X schwach zusammenziehbar.
- III.) Ist f eine Homotopieäquivalenz, dann ist Y/X zusammenziehbar.

Beweis. □

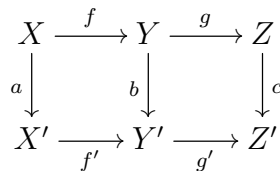
Lemma 32.14. Sind im folgenden Diagramm:



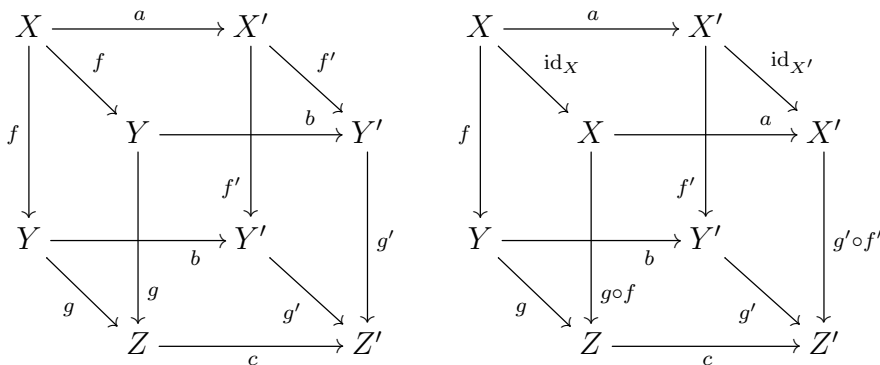
das vordere und hintere h -kokartesisch, f $n - 1$ -zusammenhängend sowie g und h n -zusammenhängend, dann ist i n -zusammenhängend.

Beweis. □

Lemma 32.15. Ist das linke Quadrat im folgenden Quadrat h -kokartesisch, dann ist das rechte Diagramm genau dann h -kokartesisch, wenn das äußere Quadrat h -kokartesisch ist:



Beweis.



\Rightarrow : Sind das linke und rechte Quadrat in Lemma (XXXX) h -kokartesisch, dann sind im linken obigen Diagramm das hintere und vordere h -kokartesisch. Da nach Beispiel (XXXX) die Identitäten jeweils schwache Homotopieäquivalenzen sind, folgt aus Lemma (XXXX), dass wenn g n -zusammenhängend ist, auch g' n -zusammenhängend ist.

\Leftarrow : Sind das linke und äußere Quadrat in Lemma (XXXX) h -kokartesisch, dann sind im rechten obigen Diagramm das hintere und vordere h -kokartesisch. □

32.1. MOORE–POSTNIKOV-FAKTORISIERUNG

Satz 32.16 (Moore–Postnikov-Faktorisierung). *Für topologische Räume X und Z existiert für jede stetige Abbildung $h: X \rightarrow Z$ ein topologischer Raum Y_n über dem h faktorisiert als:*

$$(268) \quad h: X \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{g_n} Z,$$

wobei f_n n -zusammenhängend und g_n n -kozusammenhängend ist.

Beweis. XXXX □

Für die Homotopiegruppen von Y_n gilt $\pi_i(Y_n) \cong \pi_i(X)$ für $i < n$ und $\pi_i(Y_n) \cong \pi_i(Z)$ für $i > n$.

Sei X ein topologischer Raum. Aus der n -ten Moore–Postnikov-Faktorisierung $\{*\} \rightarrow X_n^+ \rightarrow X$ folgt die Existenz eines topologischen Raumes X_n^+ mit $\pi_i(X_n^+) = 1$ für $i \leq n$ und $\pi_i(X_n^+) \cong \pi_i(X)$ für $i > n$, wobei $\pi_n(X_n^+) = 1$ indirekt aus der induzierten Surjektion $1 \twoheadrightarrow \pi_n(X_n^+)$ folgt.

Für die n -Sphäre S^n ist die n -te Homotopiegruppe die erste nichttriviale, womit sie beim Raum $(S^n)_n^+$ die einzig nichttriviale ist und dieser nach Lemma (XXXX) schwach homotopieäquivalent zum Eilenberg–MacLane-Raum $K(\mathbb{Z}, n)$ ist. Es folgt die Existenz einer kanonischen Abbildung:

$$(269) \quad K(\mathbb{Z}, n) \simeq (S^n)_n^+ \rightarrow S^n.$$

Daraus ergibt sich eine natürliche Transformation von der n -ten singulären Kohomologie zur n -ten singulären Kohomotopie:

$$(270) \quad h^n: H_{\text{sing}}^n(-, \mathbb{Z}) \cong [-, K(\mathbb{Z}, n)] \rightarrow [-, S^n] = \pi^n.$$

Sei X ein topologischer Raum. Aus der n -ten Moore–Postnikov-Faktorisierung $X \rightarrow X_n^- \rightarrow \{*\}$ folgt die Existenz eines topologischen Raumes X_n^- mit $\pi_i(X_n^-) = \pi_i(X)$ für $i < n$ und $\pi_i(X_n^-) = 1$ für $i \geq n$, wobei $\pi_n(X_n^-) = 1$ indirekt aus der induzierten Injektion $\pi_n(X_n^-) \hookrightarrow 1$ folgt. Für X_2^- ist die Fundamentalgruppe die einzige nichttriviale, womit dieser nach Lemma (XXXX) schwach homotopieäquivalent zum Eilenberg–MacLane-Raum $K(\pi_1(X), 1)$ ist. Es folgt die Existenz einer kanonischen Abbildung:

$$(271) \quad X \rightarrow X_2^- \simeq K(\pi_1(X), 1).$$

Lemma 32.17. *Ist im folgenden kommutierendem Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

topologischer Räume g n -zusammenhängend und h n -kozusammenhängend, dann existiert eine Hochhebung.

Beweis. XXXX □

Lemma 32.18. *Die Moore–Postnikov-Faktorisierung ist eindeutig bis auf schwache Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Seien X und Z topologische Räume und $h: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung und $h: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sowie $h: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z$ verschiedene Moore–Postnikov-Faktorisierungen mit f und f' n -zusammenhängend sowie g und g' n -kozusammenhängend. Nach Lemma

(??) gibt es Hochhebungen $\phi: Y \rightarrow Y'$ mit $f = \phi g$ und $i = h\phi$ sowie $\psi: Y \rightarrow Y'$ mit $g = \psi f$ und $h = i\psi$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y' \\
 g \downarrow & \phi \nearrow & \downarrow h \\
 Y & \xrightarrow{i} & Z \\
 & \psi \nwarrow & \\
 & &
 \end{array}$$

f ist insbesondere $(n - 1)$ -zsmh. und aus Lemma (??) III.) angewendet auf $g = \phi f$ folgt, dass ϕ n -zsmh. ist. g ist insbesondere $(n - 1)$ -zsmh. und aus Lemma (??) III.) angewendet auf $f = \psi g$ folgt, dass ψ n -zsmh. ist.

h ist insbesondere $(n + 1)$ -kוזusammenhängend und aus Lemma (??) II.) angewendet auf $i = h\phi$ folgt, dass ϕ n -kוזsmh. ist. i ist insbesondere $(n + 1)$ -kוזusammenhängend und aus Lemma (??) II.) angewendet auf $h = i\psi$ folgt, dass ψ n -kוזsmh. ist.

Da ϕ und ψ beide n -zsmh. und n -kוזsmh. sind, sind sie nach Korollar (??) schwache Homotopieäquivalenzen. □

33. HUREWICZ-HOMOMORPHISMUS

Sowohl Homotopie- als auch Homologiegruppen messen anschaulich die Löcher eines topologischen Raumes in einer bestimmten Dimension, weshalb die Aussicht einer Verbindung plausibel ist. Darüber hinaus sind beides wichtige topologische Invarianten, für die eine Verbindung weitreichende Auswirkungen haben kann.

33.1. INTEGRALER HUREWICZ-HOMOMORPHISMUS

Satz 33.1. *Die Hurewicz-Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. XXXX □

Satz 33.2. *Die Hurewicz-Abbildung ist eine natürliche Transformation.*

Nach XXXX ist die n -te Homotopiegruppe ein Funktor $\pi_n: \mathbf{PCTop} \rightarrow \mathbf{Grp}$ und nach XXXX ist die n -te singuläre Homologiegruppe ein Funktor $H_n(-; \mathbb{Z}): \mathbf{PCTop} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Die Hurewicz-Abbildung ist daher eine natürliche Transformation $h_n: \pi_n \Rightarrow H_n(-; \mathbb{Z})$, für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen wegzusammenhängenden topologischen Räumen X und Y gilt daher:

$$(272) \quad H_n(f) \circ h_n = h_n \circ \pi_n(f),$$

also kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_n(X) & \xrightarrow{\pi_n(f)} & \pi_n(Y) \\
 h_n \downarrow & & \downarrow h_n \\
 H_n(X) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y)
 \end{array}$$

Beweis. Seien $\gamma: S^n \rightarrow X$ stetig und $[u_n] \in H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ein Generator, dann ist:

$$\begin{aligned}
 (273) \quad (H_n(f) \circ h_n)([\gamma]) &= H_n(f)(H_n(\gamma)(u_n)) = H_n(f \circ \gamma)(u_n) \\
 &= h_n([f \circ \gamma]) = (h_n \circ \pi_n(f))([\gamma]).
 \end{aligned}$$

□

33.2. RATIONALER HUREWICZ-HOMOMORPHISMUS

XXXX

33.3. RELATIVER HUREWICZ-HOMOMORPHISMUS

XXXX

Mit dem integralen und relativen Hurewicz-Homomorphimus lassen sich die langen exakten Sequenzen aus XXXX und XXXX miteinander verbinden:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

34. HUREWICZ-THEOREM

34.1. INTEGRALES HUREWICZ-THEOREM

Theorem 34.1 (Integrales Hurewicz-Theorem). *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X mit $\pi_k(X) = 0$ für $k \leq n$ mit $n \geq 1$ (n -zusammenhängend) ist der integrale Hurewicz-Homomorphismus:*

$$(274) \quad h_k: \pi_k(X) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), [f] \mapsto f_*[S^k]$$

ein Isomorphismus für $k \leq n + 1$ und eine Surjektion für $k = n + 2$.

Beweis. XXXX □

Ist X jeweils $(n - 1)$ -zusammenhängend für $n \geq 2$, dann ist $h_n: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ ein Isomorphismus und $h_{n+1}: \pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ surjektiv. Der Eilenberg–MacLane-Raum $K(G, n)$ ist $(n - 1)$ -zusammenhängend, woraus folgt:

$$(275) \quad H_n^{\text{sing}}(K(G, n), \mathbb{Z}) \cong \pi_n K(G, n) \cong G.$$

$$(276) \quad [K(G, n), K(H, n)] \cong H_{\text{sing}}^n(K(G, n), H) \cong \text{Hom}(H_n^{\text{sing}}(K(G, n), \mathbb{Z}), H) \cong \text{Hom}(G, H)$$

34.2. RATIONALES HUREWICZ-THEOREM

Theorem 34.2 (Rationales Hurewicz-Theorem). *Für einen einfach zusammenhängenden topologischen Raum X mit $\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ für $k \leq n$ (rational n -zusammenhängend) ist der rationale Hurewicz-Homomorphismus:*

$$(277) \quad h_k \otimes \mathbb{Q}: \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X; \mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und eine Surjektion für $k = 2n + 1$.

Beweis. XXXX □

34.3. RELATIVES HUREWICZ-THEOREM

Theorem 34.3 (Relatives Hurewicz-Theorem). *Für ein n -zusammenhängendes Raumpaar (X, A) zusammenhängender Räume ist der relative Hurewicz-Homomorphismus:*

$$(278) \quad h_k: \pi_k(X, A) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X, A)$$

ein Isomorphismus für $k < n$ und:

$$(279) \quad H_n^{\text{sing}}(X, A) \cong \pi_n(X, A)/\pi_1(A).$$

Beweis. XXXX □

35. RÄUME DER (SCHWACHEN) HOMOTOPIEÄQUIVALENZEN

Für topologische Räume X und Y seien jeweils $\text{HE}(X, Y) \subseteq C_{\text{co}}(X, Y)$ bzw. $\text{WHE}(X, Y) \subseteq C_{\text{co}}(X, Y)$ der Raum der Homotopieäquivalenzen bzw. schwachen Homotopieäquivalenzen $X \rightarrow Y$, wobei diese mit der Teilraumtopologie der Kompakt-Offen-Topologie selbst topologische Räume sind. Seien:

$$(280) \quad \text{HE}'(X, Y) := \text{HE}(X, Y) / \sim_{\text{homotop}}$$

$$(281) \quad \text{WHE}'(X, Y) := \text{WHE}(X, Y) / \sim_{\text{homotop}},$$

wobei diese mit der Quotiententopologie selbst topologische Räume sind.

Lemma 35.1. *Für eine Gruppe G , für die $K(G, 1)$ ein CW-Komplex ist (XXXX: Ist diese Bedingung notwendig?), ist:*

$$(282) \quad \text{HE}'(K(G, 1)) \cong \text{Out}(G).$$

Beweis. (Siehe [?], Aufgabe 3 in Kapitel 4) XXXX □

Beispiel 35.2. *Topologische Räume, für die alle Homologiegruppen isomorph sind, müssen nicht schwach homotopieäquivalent sein. $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$ haben mit Lemma (XXXX) und (XXXX) isomorphe Homologie:*

$$(283) \quad \tilde{H}_n(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; n = 2; 4 \\ 0 & ; \text{sonst.} \end{cases} \cong \tilde{H}_n(S^2; \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_n(S^4; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_n(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z}),$$

aber nach Lemma (XXXX) sind ihre dritten, vierten und fünften Homotopiegruppen nicht isomorph:

$$(284) \quad \pi_3(\mathbb{C}P^2) \cong 1 \not\cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} * 1 \cong \pi_3(S^2) * \pi_3(S^4) \cong \pi_3(S^2 \vee S^4)$$

$$(285) \quad \pi_4(\mathbb{C}P^2) \cong 1 \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z} \cong \pi_4(S^2) * \pi_4(S^4) \cong \pi_4(S^2 \vee S^4)$$

$$(286) \quad \pi_5(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \pi_5(S^2) * \pi_5(S^4) \cong \pi_5(S^2 \vee S^4)$$

TEIL 3. KOHOMOTOPIETHEORIE

36. KOHOMOTOPIE

Definition 36.1 (Kohomotopiemenge). *Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist die Homotopieklasse:*

$$(287) \quad \pi^n(X, x_0) := [(X, x_0), (S^n, *)] = C((X, x_0), (S^n, *)) / \sim_{\text{homotop}}, n \geq 2$$

seine n -te Kohomotopiemenge.

Es gibt eine natürliche Paarung zwischen Homotopie und Kohomotopie, welche von der Komposition induziert wird:

$$(288) \quad \pi_n(X) \times \pi^n(X) \xrightarrow{([f], [g]) \mapsto [g \circ f]} \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

Nach Lemma (XXXX) sind die Sphären S^0, S^1, S^3 und S^7 die einzigen Sphären, welche H-Räume sind. Nach Lemma (??) ergeben sich für einen topologischen Raum X daher Gruppenstrukturen auf den Kohomotopiemengen $\pi^0(X), \pi^1(X), \pi^3(X)$ und $\pi^7(X)$.

Lemma 36.2. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(289) \quad \pi^0(X) \cong \mathbb{Z}_2^{b_0(X)}.$$

Beweis. XXXX □

TEIL 4. PROJEKTIVE RÄUME

37. ∞ -SPHÄRE

Mithilfe von direkten Limiten lässt sich aus den endlichdimensionalen Sphären S^n eine unendlichdimensionale Sphäre S^∞ definieren. Es gibt eine kanonische Inklusion von reell euklidischen Räumen ineinander:

$$(290) \quad i_n: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, x \mapsto (x, 0).$$

Durch die Einschränkung auf normierte Vektoren ergibt sich eine Abbildung:

$$(291) \quad i_n|_{S^n}: S^n \hookrightarrow S^{n+1}, x \mapsto (x, 0).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ ist $\|(x, 0)\| = 1$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{R}^{n+2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^n & \xrightarrow{i_n|_{S^n}} & S^{n+1} \end{array}$$

aus welcher die Stetigkeit der Abbildung direkt mit der universellen Eigenschaft der Teilraumtopologie folgt. Die Abbildungen $i_n|_{S^n}: S^n \hookrightarrow S^{n+1}$ definieren nun ein induktives System über der partiell geordneten Menge (\mathbb{N}, \leq) , dessen direkter Limes sich bilden lässt.

Definition 37.1 (∞ -Sphäre). *Der direkte Limes:*

$$(292) \quad S^\infty := \lim_{n \in \mathbb{N}} S^n$$

ist die ∞ -Sphäre.

Satz 37.2. S^∞ ist schwach zusammenziehbar.

Beweis. XXXX □

38. REELLE PROJEKTIVE RÄUME

Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wirkt auf dem topologischen Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch Skalarmultiplikation, was eine Äquivalenzrelation auf diesem induziert. Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ gibt. Zwei Punkte liegen daher genau dann in der gleichen Äquivalenzklasse, wenn sie im gleichen eindimensionalen reellen Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} liegen.

Definition 38.1 (Reeller projektiver Raum). *Der Quotientenraum unter dieser Äquivalenzrelation:*

$$(293) \quad \mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^\times$$

ist der n -te reell projektive Raum.

Unter Einschränkung auf die Einheitssphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $S^0 \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lässt sich der n -te reell projektive Raum auch alternativ ausdrücke als:

$$(294) \quad \mathbb{R}P^n = S^n / S^0.$$

Beispiel 38.2. *Es ist $\mathbb{R}P^0 \cong \{*\}$.*

Lemma 38.3. *Es ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.*

Beweis. XXXX □

38.1. CW-STRUKTUR DER REELL PROJEKTIVEN RÄUME

Lemma 38.4. $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ist ein Faserbündel mit Faser S^0 .

Da die Faser S^0 diskret ist, bedeutet das insbesondere, dass S^n eine doppelte Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$ ist.

Beweis. XXXX □

38.2. UNENDLICH REELL PROJEKTIVER RAUM

Mithilfe von direkten Limiten lässt sich aus den endlich reell projektiven Räumen $\mathbb{R}P^n$ ein unendlich reell projektiver Raum $\mathbb{R}P^\infty$ definieren. Es gibt eine kanonische Inklusion von reell euklidischen Räumen ineinander:

$$(295) \quad i_n: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, x \mapsto (x, 0).$$

Durch den Übergang auf die jeweiligen Äquivalenzklassen ihrer projektiven Räume ergibt sich eine Abbildung:

$$(296) \quad [i_n]: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}, [x] \mapsto [x : 0] = [(x, 0)].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $[x] = [y]$, also für die es ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ gibt, ist $(x, 0) = \lambda(y, 0)$, also $[x : 0] = [y : 0]$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{R}^{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{[i_n]} & \mathbb{R}P^{n+1} \end{array}$$

aus welcher die Stetigkeit der Abbildung direkt mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie folgt. Die Abbildungen $[i_n]: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ definieren nun ein induktives System über der partiell geordneten Menge (\mathbb{N}, \leq) , dessen direkter Limes sich bilden lässt.

Definition 38.5 (Unendlich reell projektiver Raum). *Der direkte Limes:*

$$(297) \quad \mathbb{R}P^\infty := \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}P^n$$

ist der unendlich reell projektive Raum.

Durch den direkten Limes ergibt sich aus dem Faserbündel nach Lemma (??) mit Satz (??) ein Faserbündel:

$$(298) \quad S^0 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty.$$

Da die ∞ -Sphäre nach Satz (??) schwach zusammenziehbar ist, also all ihre Homotopiegruppen verschwinden, ergibt sich aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen von Faserbündeln aus Satz (??), dass:

$$(299) \quad \pi_n \mathbb{R}P^\infty = \pi_{n-1} S^0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & ; n = 1 \\ 1 & ; n > 1 \end{cases} .$$

39. KOMPLEXE PROJEKTIVE RÄUME

Die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wirkt auf dem topologischen Raum $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch Skalarmultiplikation, was eine Äquivalenzrelation auf diesem induziert. Für $x, y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ gibt. Zwei Punkte liegen daher genau dann in der gleichen Äquivalenzklasse, wenn sie im gleichen eindimensionalen komplexen (also zweidimensional reellen) Untervektorraum von \mathbb{C}^{n+1} liegen.

Definition 39.1 (Komplexer projektiver Raum). *Der Quotientenraum unter dieser Äquivalenzrelation:*

$$(300) \quad \mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$$

ist der n -te komplex projektive Raum.

Unter Einschränkung auf die Einheitsphären $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $S^1 \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich der n -te reell projektive Raum auch alternativ ausdrücke als:

$$(301) \quad \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1.$$

Beispiel 39.2. *Es ist $\mathbb{C}P^0 \cong \{*\}$.*

Lemma 39.3. *Es ist $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.*

Beweis. XXXX □

39.1. CW-STRUKTUR DER KOMPLEX PROJEKTIVEN RÄUME

Lemma 39.4. *$S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ist ein Faserbündel mit Faser S^1 .*

Beweis. XXXX □

39.2. VERBINDUNG ZU REELL PROJEKTIVEN RÄUMEN

Die reell projektiven Räume lassen sich mit den komplex projektiven Räumen verbinden. \mathbb{R}^{2n} ist isomorph zu \mathbb{C}^n als \mathbb{C} -Vektorraum durch den \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus:

$$(302) \quad \phi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n, (x, y) \mapsto x + iy.$$

Durch den Übergang auf die jeweiligen Äquivalenzklassen ihrer projektiver Räume ergibt sich eine stetige Abbildung:

$$(303) \quad [\phi]: \mathbb{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}, [x] \mapsto [\phi(x)].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $x, y \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, für die ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ existiert (also $x \sim y$ in $\mathbb{R}P^{2n-1}$), gilt $\phi(x) = \lambda\phi(y)$ (also $\phi(x) \sim \phi(y)$ in $\mathbb{C}P^{n-1}$), da ϕ ein \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus ist. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^{2n-1} & \xrightarrow{[\phi]} & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

Für $n = 2$ ergibt sich mit $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ nach Lemma (??) insbesondere eine Abbildung $[\phi]: \mathbb{R}P^3 \rightarrow S^2$.

Lemma 39.5. *$\mathbb{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ ist ein Faserbündel mit Faser S^1 .*

Beweis. XXXX □

Aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen von Faserbündeln nach Satz (??) folgt mit den trivialen höheren Homotopiegruppen der 1-Sphäre S^1 nach Lemma (??) insbesondere:

$$(304) \quad \pi_k(\mathbb{R}P^{2n-1}) \cong \pi_k(\mathbb{C}P^{n-1}), k \geq 3.$$

39.3. UNENDLICH KOMPLEX PROJEKTIVER RAUM

Mithilfe von direkten Limiten lässt sich aus den endlich komplex projektiven Räumen $\mathbb{C}P^n$ ein unendlich komplex projektiver Raum $\mathbb{C}P^\infty$ definieren. Es gibt eine kanonische Inklusion von komplex euklidischen Räumen ineinander:

$$(305) \quad i_n: \mathbb{C}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+2}, x \mapsto (x, 0).$$

Durch den Übergang auf die jeweiligen Äquivalenzklassen ihrer projektiven Räume ergibt sich eine Abbildung:

$$(306) \quad [i_n]: \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}, [z] \mapsto [z : 0] = [(z, 0)].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $z, w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $[z] = [w]$, also für die es ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = \lambda w$ gibt, ist $(z, 0) = \lambda(w, 0)$, also $[z : 0] = [w : 0]$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{C}^{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^n & \xrightarrow{[i_n]} & \mathbb{C}P^{n+1} \end{array}$$

aus welcher die Stetigkeit der Abbildung direkt mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie folgt. Die Abbildungen $[i_n]: \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ definieren nun ein induktives System über der partiell geordneten Menge (\mathbb{N}, \leq) , dessen direkter Limes sich bilden lässt.

Definition 39.6 (Unendlich komplex projektiver Raum). *Der direkte Limes:*

$$(307) \quad \mathbb{C}P^\infty := \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}P^n$$

ist der unendlich komplex projektive Raum.

Durch den direkten Limes ergibt sich aus dem Faserbündel nach Lemma (??) mit Satz (??) ein Faserbündel:

$$(308) \quad S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty.$$

Da die ∞ -Sphäre nach Satz (??) schwach zusammenziehbar ist, also all ihre Homotopiegruppen verschwinden, ergibt sich aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen von Faserbündeln aus Satz (??), dass:

$$(309) \quad \pi_n \mathbb{C}P^\infty = \pi_{n-1} S^1 = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ \mathbb{Z} & ; n = 2 \\ 1 & ; n > 2 \end{cases}.$$

40. QUATERNIONISCHE PROJEKTIVE RÄUME

Die multiplikative Gruppe $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ wirkt auf dem topologischen Raum $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch Skalarmultiplikation, was eine Äquivalenzrelation auf diesem induziert. Für $x, y \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ mit $x = \lambda y$ gibt. Zwei Punkte liegen daher genau dann in der gleichen Äquivalenzklasse, wenn sie im gleichen eindimensionalen quaternionischen (also vierdimensional reellen) Untervektorraum von \mathbb{H}^{n+1} liegen.

Definition 40.1 (Quaternionischer projektiver Raum). *Der Quotientenraum unter dieser Äquivalenzrelation:*

$$(310) \quad \mathbb{H}P^n := (\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{H}^\times$$

ist der n -te quaternionisch projektive Raum.

Unter Einschränkung auf die Einheitskugeln $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $S^3 \subset \mathbb{H} \setminus \{0\}$ lässt sich der n -te reell projektive Raum auch alternativ ausdrücken als:

$$(311) \quad \mathbb{H}P^n = S^{4n+3}/S^3.$$

Beispiel 40.2. *Es ist $\mathbb{H}P^0 \cong \{*\}$.*

Lemma 40.3. *Es ist $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.*

Beweis. XXXX □

40.1. CW-STRUKTUR DER QUATERNIONISCH PROJEKTIVEN RÄUME

Lemma 40.4. *$S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ ist ein Faserbündel mit Faser S^3 .*

Beweis. XXXX □

40.2. VERBINDUNG ZU QUATERNIONISCH PROJEKTIVEN RÄUMEN

Die komplex projektiven Räume lassen sich mit den quaternionisch projektiven Räumen verbinden. \mathbb{C}^{2n} ist isomorph zu \mathbb{H}^n als \mathbb{R} -Vektorraum durch den \mathbb{R} -Vektorraumisomorphismus:

$$(312) \quad \psi: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{H}^n, (x, y) \mapsto x + jy.$$

Durch den Übergang auf die jeweiligen Äquivalenzklassen ihrer projektiver Räume ergibt sich eine stetige Abbildung:

$$(313) \quad [\psi]: \mathbb{C}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{H}P^{n-1}, [z] \mapsto [\psi(z)].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $z, w \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}$, für die ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = \lambda w$ existiert (also $z \sim w$ in $\mathbb{C}P^{2n-1}$), gilt $\psi(z) = \lambda\psi(w)$ (also $\psi(z) \sim \psi(w)$ in $\mathbb{H}P^{n-1}$), da ψ ein \mathbb{R} -Vektorraumisomorphismus ist. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{2n} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{2n-1} & \xrightarrow{[\psi]} & \mathbb{H}P^{n-1} \end{array}$$

Für $n = 2$ ergibt sich mit $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$ nach Lemma (??) insbesondere eine Abbildung $[\psi]: \mathbb{C}P^3 \rightarrow S^4$. Mit $\mathbb{C}P^3 \cong \text{SO}(5)/\text{U}(2)$ nach XXXX und $S^4 \cong \text{SO}(5)/\text{SO}(4)$ nach XXXX ist diese genau die kanonische Projektion.

Lemma 40.5. *$\mathbb{C}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{H}P^{n-1}$ ist ein Faserbündel mit Faser S^3 .*

Beweis. XXXX □

Aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen von Faserbündeln nach Satz (??) folgt mit Lemma (XXXX) insbesondere:

$$(314) \quad \pi_k(\mathbb{C}P^{2n-1}) \cong \pi_k(\mathbb{H}P^{n-1}), k \leq 2.$$

40.3. UNENDLICH QUATERNIONISCH PROJEKTIVER RAUM

Mithilfe von direkten Limiten lässt sich aus den endlich komplex projektiven Räumen $\mathbb{H}P^n$ ein unendlich komplex projektiver Raum $\mathbb{H}P^\infty$ definieren. Es gibt eine kanonische Inklusion von komplex euklidischen Räumen ineinander:

$$(315) \quad i_n: \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+2}, x \mapsto (x, 0).$$

Durch den Übergang auf die jeweiligen Äquivalenzklassen ihrer projektiven Räume ergibt sich eine Abbildung:

$$(316) \quad [i_n]: \mathbb{H}P^n \hookrightarrow \mathbb{H}P^{n+1}, [z] \mapsto [z : 0] = [(z, 0)].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $q, p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $[q] = [p]$, also für die es ein $\lambda \in \mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ mit $q = \lambda p$ gibt, ist $(q, 0) = \lambda(p, 0)$, also $[q : 0] = [p : 0]$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^{n+1} & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{H}^{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}P^n & \xrightarrow{[i_n]} & \mathbb{H}P^{n+1} \end{array}$$

aus welcher die Stetigkeit der Abbildung direkt mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie folgt. Die Abbildungen $[i_n]: \mathbb{H}P^n \hookrightarrow \mathbb{H}P^{n+1}$ definieren nun ein induktives System über der partiell geordneten Menge (\mathbb{N}, \leq) , dessen direkter Limes sich bilden lässt.

Definition 40.6 (Unendlich quaternionisch projektiver Raum). *Der direkte Limes:*

$$(317) \quad \mathbb{H}P^\infty := \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{H}P^n$$

ist der unendlich quaternionisch projektive Raum.

Durch den direkten Limes ergibt sich aus dem Faserbündel nach Lemma (??) mit Satz (??) ein Faserbündel:

$$(318) \quad S^3 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty.$$

Da die ∞ -Sphäre nach Satz (??) schwach zusammenziehbar ist, also all ihre Homotopiegruppen verschwinden, ergibt sich aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen von Faserbündeln aus Satz (??), dass:

$$(319) \quad \pi_n(\mathbb{H}P^\infty) = \pi_{n-1}(S^3).$$

Häufig wird diese Relation in rationale Homotopietheorie überführt, da dann analog wie beim unendlich reell und komplex projektiven Raum nur eine rationale Homotopiegruppe nicht trivial ist:

$$(320) \quad \pi_n(\mathbb{H}P^\infty) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{n-1}(S^3) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} 1 & ; n < 4 \\ \mathbb{Q} & ; n = 4 \\ 1 & ; n > 4 \end{cases}.$$

41. OKTONIONISCHE PROJEKTIVE RÄUME

Definition 41.1 (Oktonionischer projektiver Raum). XXXX

Lemma 41.2. *Es ist $\mathbb{O}P^1 \cong S^8$.*

Beweis. XXXX □

Es gibt kein Faserbündel:

$$(321) \quad S^7 \rightarrow S^{23} \rightarrow \mathbb{O}P^2,$$

da XXXX.

42. ARNOLD–KUIPER–MASSEY-THEOREM (AKM-THEOREM)

42.1. KOMPLEXES AKM-THEOREM

Die Automorphismengruppe $\text{Aut } \mathbb{C}$ des komplexen Körpers \mathbb{C} aufgefasst als reelle Algebra (\mathbb{R} -Algebra) ist nach XXXX gegeben durch die erste orthogonale Gruppe $O(1)$:

$$(322) \quad \text{Aut } \mathbb{C} \cong O(1).$$

Diese wirkt auf dem komplexen Körper \mathbb{C} und dadurch jeweils auf den einzelnen homogenen Koordinaten des komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$, wodurch sich eine Gruppenwirkung:

$$(323) \quad O(1) \times \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

ergibt.

Theorem 42.1 (Komplexes AKM-Theorem). *Der Orbitraum der komplex projektiven Ebene $\mathbb{C}P^2$ unter der Wirkung von $O(1)$ ist die 4-Sphäre S^4 :*

$$(324) \quad \mathbb{C}P^2 / O(1) \cong S^4.$$

Beweis. XXXX □

Nach dem komplexen AKM-Theorem gibt es eine kanonische Projektion:

$$(325) \quad \mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4.$$

42.2. QUATERNIONISCHES AKM-THEOREM

Die Automorphismengruppe $\text{Aut } \mathbb{H}$ des quaternionischen Körpers \mathbb{H} aufgefasst als reelle Algebra (\mathbb{R} -Algebra) ist nach XXXX gegeben durch die dritte spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$:

$$(326) \quad \text{Aut } \mathbb{H} \cong SO(3).$$

Diese wirkt auf dem quaternionischen Körper \mathbb{H} und dadurch jeweils auf den einzelnen homogenen Koordinaten des komplexen projektiven Raum $\mathbb{H}P^n$, wodurch sich eine Gruppenwirkung:

$$(327) \quad SO(3) \times \mathbb{H}P^n \rightarrow \mathbb{H}P^n$$

ergibt.

Theorem 42.2 (Quaternionisches AKM-Theorem). *Der Orbitraum der quaternionischen projektiven Ebene $\mathbb{H}P^2$ unter der Wirkung der ersten unitären Gruppe $U(1)$ ist die 7-Sphäre S^7 :*

$$(328) \quad \mathbb{H}P^2 / U(1) \cong S^7.$$

Beweis. XXXX □

Nach dem quaternionischen AKM-Theorem gibt es eine kanonische Projektion:

$$(329) \quad \mathbb{H}P^2 \rightarrow S^7.$$

42.3. OKTONIONISCHES AKM-THEOREM

Die Automorphismengruppe $\text{Aut } \mathbb{O}$ des oktonionischen Körpers \mathbb{O} aufgefasst als reelle Algebra (\mathbb{R} -Algebra) ist nach XXXX gegeben durch die exzeptionelle Lie-Gruppe G_2 :

$$(330) \quad \text{Aut } \mathbb{O} \cong G_2.$$

Diese wirkt auf dem oktonionischen Körper \mathbb{O} und dadurch jeweils auf den einzelnen homogenen Koordinaten des oktonionischen projektiven Raum $\mathbb{O}P^n$, wodurch sich eine Gruppenwirkung:

$$(331) \quad G_2 \times \mathbb{O}P^n \rightarrow \mathbb{O}P^n$$

ergibt.

Theorem 42.3 (Oktonionisches AKM-Theorem). *Der Orbitraum der oktonionischen projektiven Ebene $\mathbb{O}P^2$ unter der Wirkung der ersten symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(1)$ ist die 13-Sphäre S^{13} :*

$$(332) \quad \mathbb{O}P^2 / \mathrm{Sp}(1) \cong S^{13}.$$

Beweis. XXXX □

Nach dem oktonionischen AKM-Theorem gibt es eine kanonische Projektion:

$$(333) \quad \mathbb{O}P^2 \rightarrow S^{13}.$$

43. KOMBINATION DES QUATERNIONISCHEN AKM-THEOREMS MIT DER QUATERNIONISCHEN HOPF-FASERUNG

$$(334) \quad \mathbb{C}^3 \supseteq S^5 \rightarrow S^5 / \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{C}P^2$$

$$(335) \quad \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 / \mathrm{O}(1) \cong S^4$$

$$(336) \quad \mathbb{C}^2 \supseteq S^3 \rightarrow S^3 / \mathrm{U}(1) = \mathbb{C}P^1 \cong S^2$$

XXXX

$$(337) \quad \mathbb{H}^3 \supseteq S^{11} \rightarrow S^{11} / \mathrm{Sp}(1) \cong \mathbb{H}P^2$$

$$(338) \quad \mathbb{H}P^2 \rightarrow \mathbb{H}P^2 / \mathrm{U}(1) \cong S^7$$

$$(339) \quad \mathbb{H}^2 \supseteq S^7 \rightarrow S^7 / \mathrm{Sp}(1) = \mathbb{H}P^1 \cong S^4$$

XXXX

$$(340) \quad \mathbb{O}^3 \supseteq S^{23} \rightarrow S^{23} / G_2 \cong \mathbb{O}P^2$$

$$(341) \quad \mathbb{O}P^2 \rightarrow \mathbb{O}P^2 / \mathrm{Sp}(1) \cong S^{13}$$

$$(342) \quad \mathbb{O}^2 \supseteq S^{13} \rightarrow S^{13} / G_2 = \mathbb{O}P^1 \cong S^8$$

43.1. PROJEKTION SPEZIELLER UNITÄRER GRUPPEN

$$(343) \quad \mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n+1) \rightarrow \mathrm{SO}(n+1) / \mathrm{SO}(n) \cong S^n$$

$$(344) \quad \mathrm{Prin}_{\mathrm{SO}(n)} S^n \cong \pi_{n-1} \mathrm{SO}(n)$$

Insbesondere führt der Diffeomorphismus $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ nach Satz (XXXX) zu zwei Faserbündeln über einer Sphäre mit jeweils sphärischem Totalraum und sphärischer Faser:

$$(345) \quad \mathrm{SO}(1) \cong 1 \hookrightarrow \mathrm{SO}(2) \cong S^1 \rightarrow \mathrm{SO}(2) / \mathrm{SO}(1) \cong S^1$$

$$(346) \quad \mathrm{SO}(2) \cong S^3 \hookrightarrow \mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathrm{SO}(3) / \mathrm{SO}(2) \cong S^2$$

Insbesondere führt der Diffeomorphismus $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$ nach Satz (XXXX) zu zwei Faserbündeln über einer Sphäre mit jeweils sphärischem Totalraum und sphärischer Faser:

$$(347) \quad \mathrm{SO}(2) \cong S^3 \hookrightarrow \mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathrm{SO}(3) / \mathrm{SO}(2) \cong S^2$$

$$(348) \quad \mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3 \hookrightarrow \mathrm{SO}(4) \rightarrow \mathrm{SO}(4) / \mathrm{SO}(3) \cong S^3$$

43.2. PROJEKTION SPEZIELLER UNITÄRER GRUPPEN

$$(349) \quad \mathrm{SU}(n) \hookrightarrow \mathrm{SU}(n+1) \twoheadrightarrow \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) \cong S^{2n+1}$$

$$(350) \quad \mathrm{Prin}_{\mathrm{SU}(n)} S^{2n+1} \cong \pi_{2n} \mathrm{SU}(n)$$

Insbesondere führt der Diffeomorphismus $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ nach Satz (XXXX) zu zwei Faserbündeln über einer Sphäre mit jeweils sphärischem Totalraum und sphärischer Faser:

$$(351) \quad \mathrm{SU}(1) \cong 1 \hookrightarrow \mathrm{SU}(2) \cong S^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SU}(2)/\mathrm{SU}(1) \cong S^3$$

$$(352) \quad S^3 \cong \mathrm{SU}(2) \hookrightarrow \mathrm{SU}(3) \twoheadrightarrow \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \cong S^5$$

43.3. PROJEKTION SYMPLEKTISCHER GRUPPEN

$$(353) \quad \mathrm{Sp}(n) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(n+1) \twoheadrightarrow \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) \cong S^{4n+3}$$

$$(354) \quad \mathrm{Prin}_{\mathrm{Sp}(n)} S^{4n+3} \cong \pi_{4n+2} \mathrm{Sp}(n)$$

44. CW-STRUKTUR VON SPHÄREN

Sphären sind wohl die einfachsten Beispiele für CW-Komplexe mit weitreichenden Anwendungen, was aufgrund ihrer Verwendung in deren Definition nicht überraschend ist. Sphären zeigen dabei, dass die CW-Struktur eines CW-Komplexes nicht eindeutig sein muss, denn für diese werden bereits zwei völlig verschiedene je nach Anwendung benutzt.

Lemma 44.1. *Das Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & D^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{*\} & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

ist kokartesisch.

S^n entsteht also aus $\{*\}$ durch Anklebung einer n -Zelle.

Beweis. XXXX □

Das bedeutet, dass S^n eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle hat.

Lemma 44.2. *Das Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} S^n + S^n & \longrightarrow & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{n+1} + D^{n+1} & \longrightarrow & S^{n+1} \end{array}$$

ist kokartesisch.

S^{n+1} entsteht also aus S^n durch Anklebung von zwei $n+1$ -Zellen.

Beweis. XXXX □

Beginnend mit S^0 bestehend aus zwei 0-Zellen, folgt aus der induktiven Anwendung dieses Lemmas, dass S^n eine CW-Struktur mit zwei k -Zellen für $0 \leq k \leq n$ hat.

45. HOMOTOPIE PROJEKTIVER RÄUME

45.1. HOMOTOPIE DES REELL PROJEKTIVEN RAUMS

XXXX

45.2. HOMOTOPIE DES KOMPLEX PROJEKTIVEN RAUMS

XXXX

45.3. HOMOTOPIE DES QUATERNIONISCH PROJEKTIVEN RAUMS

XXXX

46. HOMOLOGIE PROJEKTIVER RÄUME

46.1. HOMOLOGIE DES REELL PROJEKTIVEN RAUMS

[?, p. 53]

(355)
$$XXXX$$

(356)
$$H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & ; n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & ; n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(357)
$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 1 & ; n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & ; n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Korollar 46.1 (Euler-Charakteristik des reellen projektiven Raumes). *Die Euler-Charakteristik des reellen projektiven Raumes ist gegeben durch: [?, Bsp 4.8]*

(358)
$$\chi(\mathbb{R}P^n) =$$

46.2. HOMOLOGIE DES KOMPLEX PROJEKTIVEN RAUMS

XXXX [?, p. 52]

Korollar 46.2 (Euler-Charakteristik des komplexen projektiven Raumes). *Die Euler-Charakteristik des komplexen projektiven Raumes ist gegeben durch: [?, Bsp 4.8]*

(359)
$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$$

46.3. HOMOLOGIE DES QUATERNIONISCH PROJEKTIVEN RAUMS

XXXX

TEIL 5. HOMOLOGIETHEORIE

47. KETTENKOMPLEXE

Definition 47.1 (Kettenkomplex). *Eine Familie an abelschen Gruppen (oder allgemeiner Objekten einer abelschen Kategorie) $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Gruppenhomomorphismen $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}}: C_n \rightarrow C_{n-1}$, wobei $C_{-1} = 1$ und $\partial_0 = 0$, für die:*

(360)
$$\forall n \geq 1: \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

bilden einen Kettenkomplex. [?, Def. 2.1]

Die Gruppe der n -Zykel ist:

(361)
$$Z_n(C_*) := \ker(\partial_n) < C_n$$

Die Gruppe der n -Ränder ist:

(362)
$$B_n(C_*) := \text{img}(\partial_{n+1}) < C_n.$$

Ein Kettenkomplex, für den:

$$(363) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} : Z_n(C_*) = B_n(C_*) \Leftrightarrow \ker(\partial_n) = \text{img}(\partial_{n+1})$$

wird *exakt* genannt. Es gibt kanonische exakte Sequenzen:

$$(364) \quad 0 \rightarrow Z_n(C_\bullet) \hookrightarrow C_n \rightarrow B_{n-1}(C_\bullet) \rightarrow 0$$

$$(365) \quad 0 \rightarrow B_n(C_\bullet) \hookrightarrow C_n \rightarrow C_n/B_n(C_\bullet) \rightarrow 0$$

Definition 47.2 (Homologie eines Kettenkomplexes). *Für einen Kettenkomplex (C_*, ∂_*) ist die Faktorgruppe:*

$$(366) \quad H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$$

dessen Homologiegruppe. [?, Def. 2.3]

Die Elemente werde *Homologieklassen* genannt. Es gibt kanonische exakte Sequenzen:

$$(367) \quad 0 \rightarrow B_n(C_\bullet) \hookrightarrow Z_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow 0$$

$$(368) \quad 0 \rightarrow H_n(C_\bullet) \hookrightarrow C_n/B_n(C_\bullet) \rightarrow B_{n-1}(C_\bullet) \rightarrow 0$$

Korollar 47.3. *Ein Kettenkomplex ist genau dann exakt, wenn alle seine Homologiegruppen trivial sind.*

Definition 47.4 (Kettenabbildung). *Für Kettenkomplexe (C_*, ∂_*) , (D_*, ∂_*) ist eine Folge von Gruppenhomomorphismen $f_n : C_n \rightarrow D_n$ die mit den Randoperatoren verträglich sind:*

$$(369) \quad f_n \circ \partial_{n+1}^C = \partial_{n+1}^D \circ f_{n+1}$$

eine Kettenabbildung $f_* : C_* \rightarrow D_*$.

Eine Kettenabbildung bildet zudem Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder ab, da:

$$(370) \quad (\partial_n^D \circ f_n)(Z_n(C_*)) = (f_{n-1} \circ \partial_n^C)(Z_n(C_*)) = f_{n-1}(\partial_n^C \ker \partial_n^C) = 0 \Rightarrow f_n(Z_n(C_*)) \subseteq Z_n(D_*)$$

$$(371) \quad f_n(B_n(C_*)) = f_n(\partial_{n+1}^C C_{n+1}) = (\partial_{n+1}^D \circ f_{n+1})(C_{n+1}) \subseteq \partial_{n+1}^D(D_{n+1}) = B_n(D_*)$$

Damit induziert eine Kettenabbildung $f_* : C_* \rightarrow D_*$:

$$(372) \quad H_n(f_*) : H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*), z_n B_n(C_*) \mapsto f_n(z_n) B_n(D_*)$$

Diese ist wohldefiniert, da für $z_{n,1}, z_{n,2} \in Z_n(C_*)$ beliebig mit $z_{n,1} B_n(C_*) = z_{n,2} B_n(C_*)$, also $z_{n,1} \circ z_{n,2}^{-1} \in B_n(C_*)$, aufgrund von Gleichung (XXXX) gilt, dass:

$$(373) \quad f(z_{n,1}) \circ f_n(z_{n,2})^{-1} = f_n(z_{n,1} \circ z_{n,2}^{-1}) \in B_n(D_*) \Rightarrow f(z_{n,1}) B_n(D_*) = f_n(z_{n,2}) B_n(D_*)$$

und zudem ein Homomorphismus.

Offensichtlich gelten für die Identität sowie mit einem weiteren Kettenkomplex (E_*, ∂_*) und einer Kettenabbildung $g_* : D_* \rightarrow E_*$:

$$(374) \quad H_n(\text{id}_X) = \text{id}_{H_n(X)}$$

$$(375) \quad H_n(g_* \circ f_*) = H_n(g_*) \circ H_n(f_*)$$

womit die Homologiegruppe zu einem kovarianten Funktor wird:

$$(376) \quad H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$$

Definition 47.5 (Unterkomplex). *Für einen Kettenkomplex (C_*, ∂_*) ist ein Kettenkomplex (D, ∂_*) mit:*

$$\text{I.) } \forall n \in \mathbb{N} : D_n \subset C_n$$

$$\text{II.) } \forall n \in \mathbb{N}: \partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$$

ein Unterkomplex.

Definition 47.6 (Quotientenkomplex). Für einen Kettenkomplex (C_*, ∂_*) und einen Unterkomplex (D_*, ∂_*) ist:

$$(377) \quad (C_*/D_*)_n := C_n/D_n$$

Definition 47.7 (Relative singuläre Kettenkomplex). Für ein Raumpaar (X, A) ist der Quotientenkomplex:

$$(378) \quad C_*(X, A) := C_*(X)/C_*(A)$$

der relative singuläre Kettenkomplex.

Die Homologiegruppe eines relativen singulären Kettenkomplexes wird auch als:

$$(379) \quad H_n(X, A) := H_n(C_*(X, A))$$

bezeichnet und *relative singuläre Homologiegruppe* genannt.

Definition 47.8 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen). Für Kettenkomplexe (C_*, ∂_*^C) , (D_*, ∂_*^D) ist $((C \otimes D)_*, (\partial^C \otimes \partial^D)_*)$ mit:

$$(380) \quad (C \otimes D)_k := \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j$$

$$(381) \quad \begin{aligned} &(\partial^C \otimes \partial^D)_{i+j}: (C \otimes D)_{i+j} \rightarrow (C \otimes D)_{i+j-1}, \\ &(\partial^C \otimes \partial^D)_{i+j}(c_i \otimes d_j) = \partial_i^C c_i \otimes d_j + (-1)^i c_i \otimes \partial_j^D d_j \end{aligned}$$

ihre Tensorprodukt.

Das Tensorprodukt zweier Kettenkomplexe ist wieder ein Kettenkomplex, da:

$$(382) \quad \begin{aligned} &(\partial^C \otimes \partial^D)_{i+j-1}(\partial^C \otimes \partial^D)_{i+j}(c_i \otimes d_j) \\ &= (\partial^C \otimes \partial^D)_{i+j-1}(\partial_i^C c_i \otimes d_j + (-1)^i c_i \otimes \partial_j^D d_j) \\ &= \underbrace{\partial_{i-1}^C \partial_i^C c_i \otimes d_j}_{=0} + \underbrace{(-1)^{i-1} \partial_i^C c_i \otimes \partial_j^D d_j + (-1)^i \partial_i^C c_i \otimes \partial_j^D d_j}_{=0} + \underbrace{c_i \otimes \partial_{j-1}^D \partial_j^D d_j}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Für eine abelsche Kategorie \mathcal{A} ist $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ die *Kategorie der Ketten auf \mathcal{A}* , deren Objekte alle Ketten mit Objekten und Morphismen in \mathcal{A} , und deren Morphismen alle Kettenmorphismen sind. $\mathbf{Ch}^-(\mathcal{A}), \mathbf{Ch}^+(\mathcal{A}), \mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ sind die Unterkategorien der nach unten und oben sowie beidseitig beschränkten Ketten auf \mathcal{A} .

Für eine abelsche Kategorie \mathcal{A} ist $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ die *Kategorie der Komplexe auf \mathcal{A}* , deren Objekte ebenfalls alle Ketten mit Objekten und Morphismen in \mathcal{A} sind, aber deren Morphismen nur Kettenhomotopieklassen aller Kettenmorphismen sind:

$$(383) \quad \text{Ob } \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) := \text{Ob } \mathbf{Ch}(\mathcal{A})$$

$$(384) \quad \mathbf{Kom}(\mathcal{A})(C_*, D_*) = \mathbf{Ch}(\mathcal{A})(C_*, D_*) / \sim_{\text{ketttenhomotop}}$$

$\mathbf{Kom}^-(\mathcal{A}), \mathbf{Kom}^+(\mathcal{A}), \mathbf{Kom}^b(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ sind die Unterkategorien der nach unten und oben sowie beidseitig beschränkten Komplexe auf \mathcal{A} .

$$(385) \quad \mathbf{Ch}: \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$$

$$(386) \quad \mathbf{Kom}: \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$$

47.1. INJEKTIVE MODELLSTRUKTUR AUF KETTENKOMPLEXEN

XXXX

47.2. PROJEKTIVE MODELLSTRUKTUR AUF KETTENKOMPLEXEN

XXXX

48. KOKETTENKOMPLEXE

Definition 48.1 (Kokettenkomplex). XXXXDie Gruppe der n -Kozykel ist:

$$(387) \quad Z^n(C^*) := \ker(\delta^n) < C^n$$

Die Gruppe der n -Koränder ist:

$$(388) \quad B^n(C^*) := \text{img}(\delta^{n-1}) < C^n.$$

Ein Kokettenkomplex für den:

$$(389) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} : Z^n(C^*) = B^n(C^*) \Leftrightarrow \ker(\delta_n) = \text{img}(\delta_{n-1})$$

wird *exakt* genannt. Es gibt kurze exakte Sequenzen:

$$(390) \quad 0 \rightarrow Z^n(C^\bullet) \hookrightarrow C^n \twoheadrightarrow B^{n-1}(C^\bullet) \rightarrow 0$$

$$(391) \quad 0 \rightarrow B^n(C^\bullet) \hookrightarrow C^n \twoheadrightarrow C^n/B^n(C^\bullet) \rightarrow 0$$

Definition 48.2 (Kohomologie eines Kettenkomplexes). Für einen Kokettenkomplex (C^*, δ^*) ist die Faktorgruppe:

$$(392) \quad H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$$

dessen Kohomologiegruppe.

Die Elemente werde *Kohomologieklassen* genannt. Es gibt kanonische exakte Sequenzen:

$$(393) \quad 0 \rightarrow B^n(C^\bullet) \hookrightarrow Z^n(C^\bullet) \twoheadrightarrow H^n(C^\bullet) \rightarrow 0$$

$$(394) \quad 0 \rightarrow H^n(C^\bullet) \hookrightarrow C^n/B^n(C^\bullet) \twoheadrightarrow B^{n+1}(C^\bullet) \rightarrow 0$$

Korollar 48.3. Ein Kokettenkomplex ist genau dann exakt, wenn alle seine Kohomologiegruppen trivial sind.

48.1. INJEKTIVE MODELLSTRUKTUR AUF KOKETTENKOMPLEXEN

XXXX

48.2. PROJEKTIVE MODELLSTRUKTUR AUF KOKETTENKOMPLEXEN

XXXX

49. SIMPLIZES

49.1. ABSTRAKTER SIMPLIZIALKOMPLEX

Eine endliche nichtleere Menge σ wird *abstraktes Simplex* genannt. Ein Element eines abstrakten Simplizes wird *Ecke* und eine nichtleere Teilmenge wird *Seite* (oder *Facette*) genannt.

Die *Dimension* eines abstrakten Simplizes ist:

$$(395) \quad \dim \sigma := |\sigma| - 1$$

Definition 49.1 (Abstrakter Simplizialkomplex). *Eine Menge \mathcal{K} von abstrakten Simplizes, für die:*

$$(396) \quad \forall \sigma \in \mathcal{K} \forall \sigma' \subseteq \sigma: \sigma' \in \mathcal{K}$$

ist ein abstrakter Simplizialkomplex (oder kombinatorischer Simplizialkomplex).

Die Menge aller Ecken aller abstrakten Simplizes in einem abstrakten Simplizialkomplex:

$$(397) \quad V(\mathcal{K}) = \bigcup_{x \in \sigma \in \mathcal{K}} \{x\}$$

ist seine *Eckenmenge* (oder *Eckenbereich*). Ein abstrakter Simplizialkomplex wird *endlich* genannt, wenn er eine endliche Menge enthält, und *lokal endlich*, wenn jede Ecke nur zu endlich vielen abstrakten Simplizes gehört.

Die *Dimension* eines abstrakten Simplizialkomplexes \mathcal{K} ist:

$$(398) \quad \dim \mathcal{K} := \max_{\sigma \in \mathcal{K}} \dim \sigma$$

Definition 49.2 (p -Skelett). *Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} ist die Teilmenge seiner abstrakten Simplizes mit einer Dimension kleiner als n :*

$$(399) \quad \mathcal{K}_p := \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \dim \sigma \leq p\}$$

dessen p -Skelett.

Definition 49.3 (p -te simpliziale Gruppe). *Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} ist die freie abelsche Gruppe:*

$$(400) \quad C_p^\Delta(\mathcal{K}) := \mathbb{Z} \times (\mathcal{K}_p \setminus \mathcal{K}_{p-1})$$

die p -te simpliziale Gruppe.

49.2. GEOMETRISCHER SIMPLIZIALKOMPLEX

Ein topologischer Raum, der homöomorph zu einem geometrischen Simplizialkomplex ist, wird *triangulierbar* genannt.

49.3. SIMPLIZIALE ABBILDUNGEN

Definition 49.4 (Simpliziale Abbildung). *Für abstrakte Simplizialkomplexe \mathcal{K}, \mathcal{L} ist eine Abbildung $f: V(\mathcal{K}) \rightarrow V(\mathcal{L})$, für die:*

$$(401) \quad \forall \sigma \in \mathcal{K} \exists \tau \in \mathcal{L} \forall x \in \sigma: f(x) \in \tau$$

eine simpliziale Abbildung $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$.

Eine bijektive simpliziale Abbildung wird *simplizialer Isomorphismus* genannt.

Definition 49.5 (Simpliziale Approximation). *Für abstrakte Simplizialkomplexe \mathcal{K}, \mathcal{L} und eine stetige Abbildung $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$*

50. SIMPLIZIALE HOMOLOGIE

$$(402) \quad \partial_k: C_k^\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow C_{k-1}^\Delta(\mathcal{K}), \partial_k \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \sum_{i=1}^k (-1)^i \langle x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k \rangle$$

$$\begin{aligned} \partial_{k-1} \partial_k \langle x_1, \dots, x_k \rangle &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \partial_{k-1} \langle x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \left(\sum_{j < i} (-1)^j \langle x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k \rangle - \sum_{j > i} (-1)^j \langle x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k \rangle \right) \end{aligned}$$

Definition 50.1 (Simpliziale Homologie). *Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} ist die Homologie seines Kettenkomplexes:*

$$(403) \quad H_*(\mathcal{K}) := H_*(C_*^\Delta(\mathcal{K}), \partial_*)$$

seine simpliziale Homologie.

Lemma 50.2. *Für eine simpliziale Menge X und eine Gruppe G ist:*

$$(404) \quad H_*^{\text{simp}}(X; G) \cong H_*^{\text{sing}}(|X|; G)$$

Beweis. □

Definition 50.3 (Simpliziale Homologie mit Koeffizienten). *Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} und eine Gruppe G ist die Homologie ihres Kettenkomplexes:*

$$(405) \quad H_*(\mathcal{K}, G) := H_*(C_*^\Delta(\mathcal{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} G, \partial_{G,*})$$

seine simpliziale Homologie mit Koeffizienten in G .

Für eine Sequenz $0 \rightarrow B \xrightarrow{g} C$ wird Gleichung (XXXX) zu $\ker(g) = \{0\}$, also ist die Sequenz genau dann exakt, wenn g injektiv ist.

Für eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ wird Gleichung (XXXX) zu $\text{img}(f) = B$, also ist die Sequenz genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

Für eine Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ wird Gleichung (XXXX) zu $\ker(f) = \{0\}$ und $\text{img}(f) = B$, also ist die Sequenz genau dann exakt, wenn f ein Isomorphismus ist.

Für eine Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ wird Gleichung (XXXX) zu $\ker(f) = \{0\}$; $\text{img}(f) = \ker(g)$ womit $g \circ f = 0$ und $\text{img}(g) = C$. Aus dem Homomorphiesatz folgt $B/\text{img}(f) = B/\ker(g) \cong \text{img}(g) = C$.

Für Raumpaare (X, A) und (Y, B) ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die $f(A) \subseteq B$ eine *stetige Abbildung von Raumpaaren*.

Für ein Raupaar (X, A) gibt es eine kurze exakte Sequenz:

$$(406) \quad 0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$$

Lemma 50.4. *Für ein Raupaar (X, A) gibt es eine Familie an Homomorphismen $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}}: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$, sodass die Sequenz:*

$$(407) \quad \dots \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

exakt ist.

Beweis. □

Lemma 50.5. Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) , für die $\{x_0\}$ und $\{y_0\}$ abgeschlossen und Umgebungsdeformationsretrakte von X und Y sind, ist:

$$(408) \quad \tilde{H}_*(X \vee Y) \cong \tilde{H}_*(X) \oplus \tilde{H}_*(Y)$$

Beweis. Da $\{x_0\}$ bzw. $\{y_0\}$ Umgebungsdeformationsretrakte von X bzw. Y sind, gibt es offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, Einbettungen $i_1: \{x_0\} \hookrightarrow U$ und $i_2: \{y_0\} \hookrightarrow V$ sowie stetige Abbildungen $p_1: U \rightarrow \{x_0\}$ und $p_2: V \rightarrow \{y_0\}$, sodass $(p_1 \circ i_1)(x_0) = x_0$ und $(p_2 \circ i_2)(y_0) = y_0$ sowie $i_1 \circ p_1 \simeq \text{id}_U$ und $i_2 \circ p_2 \simeq \text{id}_V$, womit $U \simeq \{x_0\}$ und $V \simeq \{y_0\}$.

$(U \times Y) \cap (X \vee Y)$ und $(X \times V) \cap (X \vee Y)$ sind offen⁷ in $X \vee Y$ und überdecken $X \vee Y$, dann ist nach dem Satz von Mayer–Vietoris mit $U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$ die Sequenz:

$$(409) \quad \begin{aligned} & \tilde{H}_n(U \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times V) \rightarrow \tilde{H}_n(\{x_0\} \times Y) \oplus \tilde{H}_n(X \times \{y_0\}) \rightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y) \\ & \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times V) \end{aligned}$$

exakt. Da $U \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times V \simeq \{(x_0, y_0)\}$ ist $\tilde{H}_*(U \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times V) \cong \tilde{H}_*(\{(x_0, y_0)\}) = 0$ und die mittlere Abbildung ein Isomorphismus. Mit $\{x_0\} \times Y \cong Y$, also $\tilde{H}_n(\{x_0\} \times Y) \cong \tilde{H}_n(Y)$, sowie $X \times \{y_0\} \cong X$, also $\tilde{H}_n(X \times \{y_0\}) \cong \tilde{H}_n(X)$, folgt:

$$(410) \quad \tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y)$$

□

Lemma 50.6. Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) , für die $X \vee Y$ ein abgeschlossener Umgebungsdeformationsretrakt von $X \times Y$ ist, ist:

$$(411) \quad \tilde{H}_*(X \times Y) \cong \tilde{H}_*(X \vee Y) \oplus \tilde{H}_*(X \wedge Y)$$

Beweis. Da $X \vee Y$ ein abgeschlossener Umgebungsdeformationsretrakt von $X \times Y$ ist, gibt es eine offene Menge $W \subset X \times Y$, eine Einbettung $i: X \vee Y \hookrightarrow W$ mit $i(X \vee Y) \subset W$ abgeschlossen sowie eine stetige Abbildung $p: W \rightarrow X \vee Y$ mit $p \circ i = \text{id}_{X \vee Y}$ und $i \circ p \simeq \text{id}_W$.

Mit der kanonischen Projektion $q: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ mit $q \circ i: X \vee Y \rightarrow X \wedge Y, * \mapsto [(x_0, y_0)]$, also $\tilde{H}_n(q) \circ \tilde{H}_n(i) = \tilde{H}_n(q \circ i) = 0$, ist die Sequenz:

$$(412) \quad 0 \rightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y) \xrightarrow{\tilde{H}_n(i)} \tilde{H}_n(X \times Y) \xrightarrow{\tilde{H}_n(q)} \tilde{H}_n(X \wedge Y) \rightarrow 0$$

exakt. Da $\tilde{H}_n(p) \circ \tilde{H}_n(i) = \tilde{H}_n(p \circ i) = \tilde{H}_n(\text{id}_{X \vee Y}) = \text{id}_{\tilde{H}_n(X \vee Y)}$, spaltet die Sequenz und nach dem Splitting-Lemma folgt, dass:

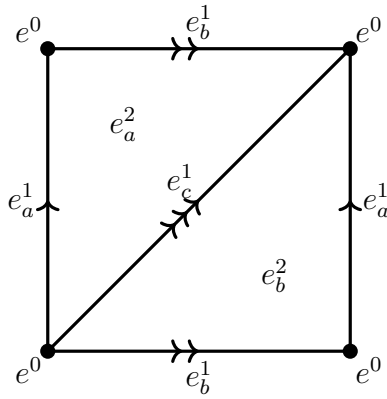
$$(413) \quad \tilde{H}_n(X \times Y) \cong \tilde{H}_n(X \vee Y) \oplus \tilde{H}_n(X \wedge Y)$$

□

50.1. SIMPLIZIALE HOMOLOGIE DES 2-TORUS

Der 2-Torus T^2 lässt sich als geometrische Realisierung des folgenden Simplicialkomplexes aus einer 0-Zelle e^0 , drei 1-Zellen e_a^1, e_b^1 und e_c^1 sowie zwei 2-Zellen e_a^2 und e_b^2 darstellen:

⁷Es kann auch die Definition $X \vee Y = (X \sqcup Y)/(x_0 \sim y_0)$ benutzt werden, in der $U \sqcup V$ und $X \sqcup Y$ bereits ohne Schnitt mit $X \vee Y$ Unterräume von $X \vee Y$ sind.



Das ist ein Quadrat, bei welchem die beiden gegenüberliegenden Kanten in gleicher Ausrichtung miteinander verklebt werden. Da es nur eine 0-Zelle gibt, beginnt sowie endet jede 1-Zelle an dieser, weshalb all ihre Differentiale verschwinden:

$$(414) \quad \partial e_a^1 = \partial e_b^1 = \partial e_c^1 = e^0 - e^0 = 0$$

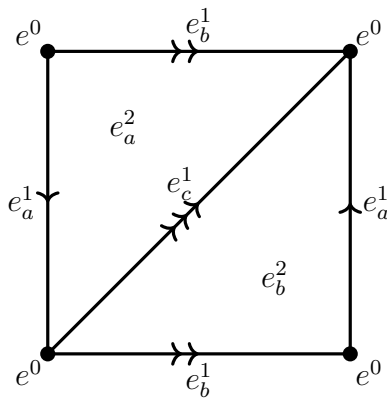
$$(415) \quad \partial e_a^2 = e_b^1 - e_c^1 + e_a^1$$

$$(416) \quad \partial e_b^2 = e_a^1 - e_c^1 + e_b^1$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{(0 \ 0 \ 0)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

50.2. SIMPLIZIALE HOMOLOGIE DER KLEINSCHEN FLASCHE

Die Kleinsche Flasche K lässt sich als geometrische Realisierung des folgenden Simplicialkomplexes aus einer 0-Zelle e^0 , drei 1-Zellen e_a^1 , e_b^1 und e_c^1 sowie zwei 2-Zellen e_a^2 und e_b^2 darstellen:



Das ist ein Quadrat, bei welchem die beiden gegenüberliegenden Kanten einmal in gleicher Ausrichtung und einmal in verkehrter Ausrichtung miteinander verklebt werden. Da es nur eine 0-Zelle gibt, beginnt sowie endet jede 1-Zelle an dieser, weshalb all ihre Differentiale verschwinden:

$$(417) \quad \partial e_a^1 = \partial e_b^1 = \partial e_c^1 = e^0 - e^0 = 0$$

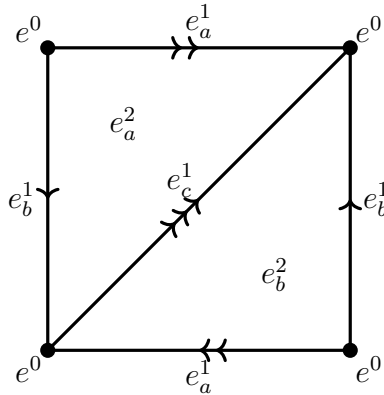
$$(418) \quad \partial e_a^2 = e_c^1 - e_b^1 + e_a^1$$

$$(419) \quad \partial e_b^2 = e_b^1 - e_c^1 + e_a^1$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{(0 \ 0 \ 0)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

50.3. SIMPLIZIALE HOMOLOGIE DER REELL PROJEKTIVEN EBENE

Die reell projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ lässt sich als geometrische Realisierung des folgenden Simplizialkomplexes aus einer 0-Zelle e^0 , drei 1-Zellen e_a^1, e_b^1 und e_c^1 sowie zwei 2-Zellen e_a^2 und e_b^2 darstellen:



Das ist ein Quadrat, bei welchem die beiden gegenüberliegenden Kanten in verkehrter Ausrichtung miteinander verklebt werden. Da es nur eine 0-Zelle gibt, beginnt sowie endet jede 1-Zelle an dieser, weshalb all ihre Differentiale verschwinden:

$$(420) \quad \partial e_a^1 = \partial e_b^1 = \partial e_c^1 = e^0 - e^0 = 0$$

$$(421) \quad \partial e_a^2 = e_c^1 - e_b^1 + e_a^1$$

$$(422) \quad \partial e_b^2 = e_c^1 - e_b^1 + e_a^1$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{(0 \ 0 \ 0)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

51. SINGULÄRE HOMOLOGIE

Definition 51.1 (Singuläres n -Simplex). Für einen topologischen Raum X wird eine stetige Abbildung $\sigma \in C(\Delta^n, X)$ ein singuläres n -Simplex in X genannt.

Die Menge aller singulären n -Simplizes in X wird als $\Delta_n(X) := C(\Delta^n, X)$ bezeichnet. Da die Komposition von stetigen Abbildungen wieder stetig ist, folgt, dass für topologische Räume X und Y , eine stetige Abbildung $f \in C(X, Y)$ und einen singulären n -Simplex $\sigma \in \Delta_n(X)$ gilt, dass $f \circ \sigma \in \Delta_n(Y)$.

Definition 51.2 (Rand eines singulären Simplex). Für ein singuläres n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ist:

$$(423) \quad d_i^n(\sigma) = \sigma \circ d_i^n: \Delta^{n-1} \rightarrow X$$

dessen i -ter Rand.

Aus Lemma (XXXX) folgt:

$$(424) \quad d_j^n d_i^{n+1}(\sigma) = d_i^n d_{j+1}^{n+1}(\sigma), i < j$$

$$(425) \quad d_i^n d_{i+1}^{n+1}(\sigma) = 0$$

Definition 51.3 (Singuläre Kettengruppe). Für einen topologischen Raum X und eine Gruppe G ist:

$$(426) \quad C_n(X; G) := C_n(X) \otimes G$$

die n -singuläre Kettengruppe mit Koeffizienten in G .

Die Elemente werden *singuläre n -Ketten mit Koeffizienten in G* genannt.

$$(427) \quad \sum_{\sigma \in \Delta_n(X)} \lambda_\sigma \sigma$$

geschrieben.

Definition 51.4 (Singuläre Kokettengruppe). *Für einen topologischen Raum X und eine Gruppe G ist:*

$$(428) \quad C^n(X; G) := \text{Hom}(C_n(X), G)$$

die singuläre Kokettengruppe mit Koeffizienten in G .

Die Elemente werden *singuläre n -Koketten mit Koeffizienten in G* genannt.

$$(429) \quad \partial^n: \Delta_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \partial_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(\sigma)$$

$$(430) \quad \partial^n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \partial^n \sum_{\sigma \in C_n(X)} \lambda_\sigma \sigma := \sum_{\sigma \in C_n(X)} \lambda_\sigma \partial^n \sigma$$

Eine singuläre n -Kette $\sigma \in C_n(X)$, für die $\partial_n \sigma = 0$ wird *geschlossen* oder *n -Zykel* genannt. Eine singuläre n -Kette $\sigma \in C_n(X)$, für die $\exists \rho \in C_{n+1}(X): \partial_{n+1} \rho = \sigma$ wird *exakt* oder *n -Rand* genannt. Die entsprechenden Gruppen sind:

$$(431) \quad Z_n(X; G) := \ker \partial_n$$

$$(432) \quad B_n(X; G) := \text{img } \partial_{n+1}$$

Gemäß Gleichung (??) sind exakte Ketten geschlossen, also $B_n(X) < Z_n(X)$.

$(C_*(X), \partial_*)$ ein vom topologischen Raum erzeugter Kettenkomplex.

$$(433) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}}: \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

$$(434) \quad \delta^n: C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G), \phi \mapsto \phi \circ \partial_{n+1}$$

$$(435) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}}: \delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$$

Eine singuläre n -Kokette $\sigma \in C^n(X)$, für die $\delta^n \sigma = 0$ wird *geschlossen* oder *n -Kozykel* genannt. Eine singuläre n -Kokette $\sigma \in C^n(X)$, für die $\exists \rho \in C^{n-1}(X): \delta^{n-1} \rho = \sigma$ wird *exakt* oder *n -Korand* genannt. Die entsprechenden Gruppen sind:

$$(436) \quad Z^n(X; G) := \ker \delta^n$$

$$(437) \quad B^n(X; G) := \text{img } \delta^{n-1}$$

Gemäß Gleichung (??) sind exakte Koketten geschlossen, also $B^n(X) < Z^n(X)$.

Definition 51.5 (Singuläre Homologie). *Für topologischen Raum X und eine Gruppe G ist die Homologie seines Kettenkomplexes mit Koeffizienten in G :*

$$(438) \quad H_*^{\text{sing}}(X; G) := H_*(C_*(X; G), \partial_*)$$

seine singuläre Homologie mit Koeffizienten in G .

Definition 51.6 (Singuläre Kohomologie). Für topologischen Raum X und eine Gruppe G ist die Kohomologie seines Kokettenkomplexes mit Koeffizienten in G :

$$(439) \quad H_{\text{sing}}^*(X; G) := H^*(C^*(X; G), \delta^*)$$

seine singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G .

Definition 51.7 (Singuläre Homologie mit Koeffizienten). Für einen topologischen Raum X und eine Gruppe G ist die Homologie ihres Kettenkomplexes:

$$(440) \quad H_*^{\text{sing}}(X, G) := H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G, \partial_{G,*})$$

seine singuläre Homologie mit Koeffizienten in G .

Satz 51.8 (Satz von Eilenberg–Zilber). Für topologische Räume X und Y ist der Kettenkomplex $C_*(X \times Y)$ ketten-homotopieäquivalent zum Kettenkomplex $C_*(X) \otimes C_*(Y)$.

Lemma 51.9. Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} und eine Gruppe G ist ihre simpliziale Homologie isomorph zur singulären Homologie der geometrischen Realisierung:

$$(441) \quad H_*(\mathcal{K}.G) \cong H_*(|\mathcal{K}|, G)$$

Beweis. □

$$\begin{array}{ccc} C_n(\partial\Delta^k) & \hookrightarrow & C_n(\Delta^k) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ C_{n-1}(\partial\Delta^k) & \hookrightarrow & C_{n-1}(\Delta^k) \end{array}$$

Lemma 51.10. Für einen topologischen Raum X ist:

$$(442) \quad H_*(X) \cong \bigoplus_{Y \in \pi_0(X)} H_*(Y)$$

Definition 51.11 (Singuläre Zykel). Für einen topologischen Raum X ist:

$$(443) \quad Z_n(X) := \ker \partial_n < C_n(X)$$

die Gruppe der singulären n -Zykel in X .

Für topologische Räume X, Y und eine stetige Abbildung $f \in C^0(X, Y)$ gilt:

$$(444) \quad f[Z_n(X)] \subseteq Z_n(Y)$$

Definition 51.12 (Singuläre Ränder). Für einen topologischen Raum X ist:

$$(445) \quad B_n(X) = \text{img } \partial_{n+1} < C_n(X)$$

die Gruppe der singulären n -Ränder in X .

Aufgrund von Gleichung (XXXX) ist zudem:

$$(446) \quad B_n(X) < Z_n(X)$$

Für topologische Räume X, Y und eine stetige Abbildung $f \in C^0(X, Y)$ gilt:

$$(447) \quad f[B_n(X)] \subseteq B_n(Y)$$

Definition 51.13 (Singuläre Homologiegruppe). Für einen topologischen Raum X ist die Faktorgruppe:

$$(448) \quad H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$$

dessen n -te singuläre Homologiegruppe.

Die Elemente der Homologiegruppe werden *Homologieklassen* genannt.

Für topologische Räume X, Y induziert eine stetige Abbildung $f \in C^0(X, Y)$ eine Abbildung:

$$(449) \quad H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y), z_n B_n(X) \mapsto f(z_n) B_n(Y)$$

Diese ist wohldefiniert, da für $z_{n,1}, z_{n,2} \in Z_n(X)$ beliebig mit $z_{n,1} B_n(X) = z_{n,2} B_n(X)$, also $z_{n,1} \circ z_{n,2}^{-1} \in B_n(X)$, aufgrund von Gleichung (??)_{S,??} gilt, dass:

$$(450) \quad f(z_{n,1}) \circ f_n(z_{n,2})^{-1} = f_n(z_{n,1} \circ z_{n,2}^{-1}) \in B_n(Y) \Rightarrow f(z_{n,1}) B_n(Y) = f_n(z_{n,2}) B_n(Y)$$

und zudem ein Homomorphismus.

Sind die topologischen Räume X, Y homöomorph, dann ist für $f \in \text{Homeo}(X, Y)$ die induzierte Abbildung $H_n(f)$ bijektiv, und damit insbesondere ein Isomorphismus, da die Umkehrabbildung:

$$(451) \quad H_n(f)^{-1} = H_n(f^{-1})$$

existiert.

Korollar 51.14. *Homöomorphe topologische Räume haben isomorphe singuläre Homologiegruppen.*

Satz 51.15. *Für einen nichtleeren wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist:*

$$(452) \quad H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Beweis. Ein singuläres 0-Simplex $\Delta^0 \rightarrow X$ kann als Punkt $x \in X$ interpretiert werden. Da $\partial_0 = 0$ ist $Z_0 = \ker \partial_0 = C_0(X)$.

$$(453) \quad B_0(X) = \text{img } \partial_1$$

Sei $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$ ein singuläres 1-Simplex, dann ist:

$$(454) \quad \epsilon(\partial_1 \sigma) = \epsilon(d_0(\sigma) - d_1(\sigma)) = \epsilon(\sigma \circ d_0^1 - \sigma \circ d_1^1) = 1 - 1 = 0$$

□

Satz 51.16. *Für einen nichtleeren und wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist:*

$$(455) \quad H_1(X) \cong \pi_1^{\text{ab}}(X)$$

Beweis.

□

Korollar 51.17. *Für nichtleere und wegzusammenhängende topologische Räume X und Y ist mit Satz (XXXX) und Satz (XXXX) sowie Lemma (XXXX) im Skript Algebra:*

$$(456) \quad \begin{aligned} H_1(X \times Y) &\cong \pi_1^{\text{ab}}(X \times Y) \cong (\pi_1(X) \times \pi_1(Y))^{\text{ab}} \\ &\cong \pi_1^{\text{ab}}(X) \times \pi_1^{\text{ab}}(Y) \cong H_1(X) \times H_1(Y) \end{aligned}$$

Definition 51.18 (Reduzierte Homologie). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(457) \quad \tilde{H}_0(X) :=$$

$$(458) \quad H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

$$(459) \quad \epsilon: \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sum_{x \in X} a_x x \mapsto \sum_{x \in X} a_x$$

$$(460) \quad a: \mathbb{Z} \rightarrow H_0^{\text{sing}}(X), n \mapsto [n \cdot x_0]$$

$$(461) \quad (\epsilon \circ a)(n) = \epsilon([n \cdot x_0]) = n$$

$$(462) \quad (a \circ \epsilon) \left(\left[\sum_{x \in X} a_x x \right] \right) = a \left(\sum_{x \in X} a_x \right) = \left[\left(\sum_{x \in X} a_x \right) x_0 \right]$$

52. ABSTRAKTER ZELLKOMPLEXE

Definition 52.1 (Abstrakter Zellkomplex). *Eine Menge X , eine transitive Relation $R \subseteq X \times X$ und eine Abbildung $\dim: X \rightarrow \mathbb{N}$, für die:*

$$(463) \quad \forall x, y \in X: xRy \Rightarrow \dim(x) < \dim(y)$$

53. CW-KOMPLEXE

Definition 53.1 (n -Zelle). *Ein topologischer Raum, der homöomorph zu D^n ist, wird n -Zelle genannt.*

Für einen topologischen Raum Y und einen Teilraum $X \subseteq Y$ entsteht Y aus X durch das Ankleben von n -Zellen, wenn es ein kokartesisches Diagramm der Form:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} S^{n-1} & \xrightarrow{(q_i)_{i \in I}} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} D^n & \xrightarrow{(Q_i)_{i \in I}} & Y \end{array}$$

gibt. Die Abbildungen $(q_i)_{i \in I}: S^{n-1} \rightarrow X$ werden *anklebende* und die Abbildungen $(Q_i)_{i \in I}: D^n \rightarrow Y$ werden *charakterisierende Abbildungen* genannt.

Definition 53.2 (CW-Komplex).

Für einen CW-Komplex X wird X_n dessen n -Skelett genannt.

Lemma 53.3. *Jeder CW-Komplex ist lokal zusammenziehbar.*

Beweis. XXXX □

Lemma 53.4. *CW-Komplexe sind parakompakte Hausdorff-Räume.*

Beweis. XXXX □

Mit dem Dieudonné-Theorem⁸ folgt:

Korollar 53.5. *CW-Komplexe sind normal.*

⁸Siehe Theorem (??) im Skript *Topologie*.

Definition 53.6 (Zelluläre Abbildung). Für CW-Komplexe X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die:

$$(464) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} : f(X_n) \subseteq Y_n$$

eine zelluläre Abbildung.

Lemma 53.7. Für CW-Komplexe X und Y ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ homotop zu einer zellulären Abbildung.

Beweis. □

Lemma 53.8. Für einen CW-Komplex X und einen endlichen CW-Komplex Y ist $X \times Y$ ebenso ein CW-Komplex.

Beweis. XXXX □

Lemma 53.9. Für einen CW-Komplex X und einen CW-Unterkomplex $Y \subseteq X$ ist X/Y ebenso ein CW-Komplex und die Projektion $X \rightarrow X/Y$ ist zellulär.

Beweis. XXXX □

Aus Lemma (??) und (??) folgt:

Korollar 53.10. Für jeden CW-Komplex X ist dessen Kegel CX ebenso ein CW-Komplex.

Lemma 53.11. Jeder CW-Komplex ist parakompakt.

Beweis. □

Lemma 53.12. Jeder CW-Komplex ist kompakt generiert.

Beweis. □

Lemma 53.13. Für jeden topologischen Raum X gibt es einen CW-Komplex Y und eine schwache Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$.

Beweis. XXXX □

54. WHITEHEAD-THEOREM

Satz 54.1 (Satz von Whitehead). Eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen zusammenhängenden CW-Komplexen ist bereits eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. XXXX □

Die Existenz einer schwachen Homotopieäquivalenz, welche sämtliche Homotopiegruppen isomorph macht, ist dabei zwingend notwendig. S^2 und $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ haben in jedem Grad isomorphe Homotopiegruppen⁹, jedoch ist XXXX, also kann weder keine (schwache) Homotopieäquivalenz zwischen ihnen existieren.

Definition 54.2 (G -CW-Komplex). Für eine Gruppe G ist ein CW-Komplex X mit einer Gruppenwirkung $G \times X \rightarrow X$, für die:

$$(465) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} : X_n/G \subseteq X_n,$$

ein G -CW-Komplex.

$S^m \times \mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{R}P^m \times S^n$ haben die gleiche universelle Überlagerung $S^m \times S^n$.

⁹Für $k \neq 2$ ist $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) \cong 1$ nach Gleichung (XXXX) trivial. Mit $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ nach Gleichung (XXXX) und Lemma (XXXX), wonach Homotopiegruppen mit Produkten kommutieren, folgt die Behauptung. Für $k = 2$ ist $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ nach Gleichung (XXXX). Mit $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ nach Lemma (XXXX) und $\pi_2(S^3)$ nach Lemma (XXXX) sowie Lemma (XXXX), wonach Homotopiegruppen mit Produkten kommutieren, folgt die Behauptung.

55. STABILE HOMOTOPIEGRUPPEN VON SPHÄREN

Lemma 55.1. *Der Abbildungsgrad ist ein Isomorphismus:*

$$(466) \quad \deg: \pi_0^{\text{stab}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt, da nach Lemma (??) der Abbildungsgrad von der Einhängung erhalten wird und nach Lemma (??) ebenfalls ein Isomorphismus $\deg: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist. \square

Eine spezielle Äquivalenzklasse in π_0^{stab} wird dargestellt durch die reelle Hopf-Faserung $h_{\mathbb{R}}: S^1 \rightarrow S^1$, doch wegen $\deg(h_{\mathbb{R}}) = 2$ nach XXXX ist diese kein Generator. Jedoch sind die höheren Hopf-Faserungen jeweils Generatoren.

Lemma 55.2. *Die komplexe Hopf-Faserung $h_{\mathbb{C}}: S^3 \rightarrow S^2$ ist ein Generator der ersten stabilen Homotopiegruppen der Sphäre :*

$$(467) \quad [h_{\mathbb{C}}] \in \pi_1^{\text{stab}} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Beweis. XXXX \square

Da $h_{\mathbb{C}} = 2[\text{id}_{S^2}, \text{id}_{S^2}]$ nach XXXX und Einhängungen von Whitehead-Produkten nach XXXX immer verschwinden, entspricht $2\Sigma h_{\mathbb{C}} \in \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$ dem Nullelement.

Lemma 55.3. *Die quaternionische Hopf-Faserung $h_{\mathbb{H}}: S^7 \rightarrow S^4$ ist ein Generator der dritten stabilen Homotopiegruppe der Sphären:*

$$(468) \quad [h_{\mathbb{H}}] \in \pi_3^{\text{stab}} \cong \mathbb{Z}_{24}.$$

Beweis. XXXX \square

Lemma 55.4. *Die oktonionische Hopf-Faserung $h_{\mathbb{O}}: S^{15} \rightarrow S^8$ ist ein Generator der siebten stabilen Homotopiegruppe der Sphären:*

$$(469) \quad [h_{\mathbb{O}}] \in \pi_7^{\text{stab}} \cong \mathbb{Z}_{240}.$$

Beweis. XXXX \square

55.1. FREUDENTHALSCHER EINHÄNGUNGSSATZ

Satz 55.5 (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Für einen n -zusammenhängenden CW-Komplex X sind die von der Einhängung induzierten Abbildungen $\pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X)$ für $1 \leq k \leq 2n$ Isomorphismen und für $k = 2n + 1$ surjektiv.*

Beweis. XXXX \square

Definition 55.6 (Stabile Homotopiegruppen). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(470) \quad \pi_n^{\text{stab}}(X) := \pi_n(\Sigma^\infty X)$$

dessen n -te stabile Homotopiegruppe.

Die Einhängung erhält Sphären nach Lemma (3.4). Da die Definition von Homotopiegruppen auf Sphären basieren, können diese über die Einhängung miteinander verbunden werden.

Satz 55.7 (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Die Abbildung:*

$$(471) \quad \pi_k(S^n, *) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1}, *), [\alpha] \mapsto [S\alpha] = [\alpha^1]$$

ist ein Isomorphismus für $k < 2n - 1$ und ein Epimorphismus für $k = 2n - 1$.

Beweis. XXXX □

Satz 55.8. *Für ein $n-1$ -zusammenhängenden topologischen Raum X ist $X \rightarrow * \times_{SX}^h *$ $2n-1$ -zusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Satz 55.9. *Für ein $n-1$ -zusammenhängenden topologischen Raum X ist $X \rightarrow \Omega\Sigma X$ (Einheit der Adjunktion $\Sigma \dashv \Omega$ bei X) $2n-1$ -zusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Aus der Anwendung von π_k auf Satz (??) folgt:

Korollar 55.10. *Für ein $n-1$ -zusammenhängenden topologischen Raum X ist $\pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X)$ ein Isomorphismus für $k < 2n - 1$ und ein Epimorphismus für $k = 2n - 1$.*

Aus der Anwendung von Korollar (??) auf $X = S^n$ folgt Satz (??) als Spezialfall.

Satz 55.11. *Für einen n -zusammenhängenden CW-Komplex Y und einen endlichen CW-Komplex X mit $H_{\text{sing}}^m(X) = 0$ für alle $m > 2n$ ist:*

$$(472) \quad [X, Y] \rightarrow [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]$$

eine Bijektion für alle $k \geq 0$.

Beweis. XXXX □

Korollar 55.12. *Für ein $n \in \mathbb{N}$, einen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -zusammenhängenden CW-Komplex Y ist:*

$$(473) \quad \pi_n(Y) \rightarrow \pi_{n+k}(\Sigma^k Y)$$

eine Bijektion für alle $k \geq 0$.

Korollar 55.13. *Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einen endlichen CW-Komplex X mit $H_{\text{sing}}^m(X) = 0$ für alle $m > 2(n-1)$ ist:*

$$(474) \quad \pi^n(X) \rightarrow \pi^{n+k}(\Sigma^k X)$$

eine Bijektion für alle $k \geq 0$.

56. ČECH-HOMOLOGIE

Definition 56.1 (Nerv). *Für einen topologischen Raum X und eine endliche offene Überdeckung \mathcal{V} ist der abstrakte Simplicialkomplex $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}$ mit $V(\mathcal{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$ und $\mathcal{U} \in \mathcal{K}_{\mathcal{V}}$ für $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ genau dann, wenn:*

$$(475) \quad \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset$$

der Nerv von \mathcal{U} .

Definition 56.2 (Čech-Homologie).

Satz 56.3. *Homotopieäquivalente topologische Räume haben isomorphe Čech-Homologiegruppen.*

57. UNIVERSSELLES KOEFFIZIENTENTHEOREM

Meist werden Homologie- und Kohomologie mit Einträgen im Ring der ganzen Zahlen betrachtet, doch es lässt sich ebenfalls ein beliebiger anderer Ring benutzen.

Theorem 57.1 (Universelles Koeffiziententheorem, homologisch). *Für einen topologischen Raum X und eine Gruppe G gibt es eine kurze exakte Folge:*

$$(476) \quad 0 \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G \rightarrow H_n(X, G) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0$$

Beweis. XXXX □

Korollar 57.2. *Für einen topologischen Raum X , sodass $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ torsionsfrei ist, und eine Gruppe G gilt:*

$$(477) \quad H_n(X, G) \cong H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G.$$

Eine abelsche Gruppe, also ein \mathbb{Z} -Modul, ist genau dann flach, wenn sie torsionsfrei ist.

Theorem 57.3 (Universelles Koeffiziententheorem, kohomologisch). *Für einen topologischen Raum X und eine Gruppe G gibt es eine kurze exakte Folge:*

$$(478) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow H^n(X, G) \rightarrow \text{Hom}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0$$

Beweis. XXXX □

Korollar 57.4. *Für einen topologischen Raum X , sodass $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe ist, und eine Gruppe G gilt:*

$$(479) \quad H^n(X, G) \cong \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G).$$

Eine abelsche Gruppe, also ein \mathbb{Z} -Modul, ist genau dann projektiv, wenn sie eine freie abelsche Gruppe ist.

Lemma 57.5. *Für einen endlichen CW-Komplex X ist:*

$$(480) \quad H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_n(X)} \oplus \text{Tor } H_{n-1}(X; \mathbb{Z}).$$

Beweis. XXXX

$$(481) \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}^{b_n(X)}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\text{Tor } H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Tor } H_n(X, \mathbb{Z})$$

$$(482) \quad \text{Hom}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^{b_n(X)}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\text{Tor } H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_n(X)}$$

□

Ist Σ eine rationale n -Homologiesphäre, dann sind die Homologiegruppen $H_{k-1}(\Sigma; \mathbb{Z})$ für $2 \leq k \leq n$ jeweils Torsionsgruppen, insbesondere gibt es keine nichttrivialen Gruppenhomomorphismen in die ganzen Zahlen \mathbb{Z} . Aus der kohomologischen Version des universellen Koeffiziententheorems (??) folgt $H^k(\Sigma; \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{k-1}(\Sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

58. HOPF–WHITNEY-THEOREM

Das *Hopf–Whitney-Theorem* ist ein wichtiges Resultat zur Bestimmung der Menge an Homotopieklassen zwischen zwei geeigneten Räumen, nämlich einem CW-Komplex und einem mehrfach zusammenhängenden Raum. Diese wird als Kohomologie des vorderen Raumes mit Koeffizienten in der ersten nichttrivialen Homotopiegruppe des hinteren Raumes angegeben. Zuerst beschrieben wurde das Theorem von Heinz Hopf in [?] im Jahr 1933 und von Hassler Whitney in [?] im Jahr 1937. Beide gaben jedoch speziellere Ergebnisse für Betti-Zahlen an.

Theorem 58.1 (Hopf–Whitney-Theorem). XXXX

Beweis. XXXX □

Aus der kohomologischen Formulierung des universellen Koeffiziententheorems (??) ergibt sich für die im Hopf–Whitney-Theorem auftauchende Kohomologie die kurze exakte Sequenz:

$$(483) \quad 1 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), \pi_n(Y)) \rightarrow H^n(X, \pi_n(Y)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X, \mathbb{Z}), \pi_n(Y)) \rightarrow 1$$

59. SATZ VON KÜNNETH

Satz 59.1 (Satz von Künneth). *Für zwei Kettenkomplexe (C_*, ∂_*^C) , (D_*, ∂_*^D) von Moduln über einem Hauptidealring R , von denen einer nur aus flachen Moduln besteht, gibt es eine kurze exakte Sequenz:*

$$(484) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=k} H_i(C_*) \otimes H_j(D_*) \rightarrow H_n((C \otimes D)_*) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}_1^R(H_i(C_*), H_j(D_*)) \rightarrow 0$$

Beweis. □

59.1. HOMOLOGIE VON $\text{SO}(4)$

$$(485) \quad H_0(\text{SO}(4)) = H_0(\mathbb{R}P^3 \times S^3) = H_0(\mathbb{R}P^3) \otimes H_0(S^3) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$$

$$(486) \quad H_1(\text{SO}(4)) = H_1(\mathbb{R}P^3 \times S^3) = H_0(\mathbb{R}P^3) \otimes H_1(S^3) \oplus H_1(\mathbb{R}P^3) \otimes H_0(S^3) = \mathbb{Z} \otimes 1 \oplus \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}$$

$$(487) \quad H_2(\text{SO}(4)) = H_2(\mathbb{R}P^3 \times S^3) = H_0(\mathbb{R}P^3) \otimes H_2(S^3) \oplus H_1(\mathbb{R}P^3) \otimes H_1(S^3) \oplus H_2(\mathbb{R}P^3) \otimes H_0(S^3) = \mathbb{Z} \otimes 1 \oplus \mathbb{Z}_2 \otimes 1$$

60. RETRAKTE

Lemma 60.1. *Retrakte von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen.*

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und Y ein Retrakt von X , dann gibt es einen Schnitt $s: Y \rightarrow X$ und eine Retraktion $r: X \rightarrow Y$ mit $r \circ s = \text{id}_Y$.

$$(488) \quad s(Y) = s(r(X)) = \{x \in X \mid (s \circ r)(x) = x\} = ((s \circ r) \times \text{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$$

□

61. RAUMTUPEL

61.1. RAUMPAARE

In der Kategorie $\mathbf{Top}^{(2)}$ der Raumpaare gibt es einen kanonischen Verschiebungsfunktor („S“ für „Shift“, englisch für „Verschiebung“) $S_2: \mathbf{Top}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(2)}$, $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$, welche stetige Abbildungen auf ihre entsprechende Einschränkung schickt.

61.2. RAUMTRIPPEL

In der Kategorie $\mathbf{Top}^{(3)}$ der Raumtripel gibt es einen kanonischen Verschiebungsfunktor („S“ für „Shift“, englisch für „Verschiebung“) $S_3: \mathbf{Top}^{(3)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(3)}$, $(X, A, B) \mapsto (A, B, \emptyset)$, welche stetige Abbildungen auf ihre entsprechende Einschränkung schickt.

61.3. RAUMTUPEL

Ein beliebiges Raumpupel kann durch die leere Menge an einem Ende erweitert werden, das ergibt einen kanonischen Funktor:

$$(489) \quad E_k: \mathbf{Top}^{(k)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(k+1)}, (X_k, \dots, X_1) \mapsto (X_k, \dots, X_1, \emptyset),$$

welcher stetige Abbildungen auf sich selbst schickt. Für ein Raumpupel lässt sich zudem eine beliebige Teilmenge in diesem entfernen oder duplizieren, das ergibt kanonische Funktoren:

$$(490) \quad \begin{aligned} & F_{k,i}: \mathbf{Top}^{(k)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(k+1)}, \\ & (X_k, \dots, X_{i+1}, X_i, X_{i-1}, \dots, X_1) \mapsto (X_k, \dots, X_{i+1}, X_i, X_i, X_{i-1}, \dots, X_1), \end{aligned}$$

welche stetige Abbildungen auf sich selbst schickt, sowie:

$$(491) \quad \begin{aligned} & G_{k,i}: \mathbf{Top}^{(k)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(k-1)}, \\ & (X_k, \dots, X_{i+1}, X_i, X_{i-1}, \dots, X_1) \mapsto (X_k, \dots, X_{i+1}, X_{i-1}, \dots, X_1), \end{aligned}$$

welche stetige Abbildungen für $i < k$ auf sich selbst und für $i = k$ auf auf ihre entsprechende Einschränkung schickt. Eine leere Menge am Ende des Raumpupels hinzuzufügen und wieder zu entfernen oder eine Teilmenge zu duplizieren und entweder die eine oder andere wieder zu entfernen, ergibt wieder das ursprüngliche Raumpupel, daher ist:

$$(492) \quad G_{k+1,1} \circ E_k = G_{k+1,i} \circ F_{k,i} = G_{k+1,i+1} \circ F_{k,i} = \text{id}_{\mathbf{Top}^{(k)}}.$$

Lemma 61.1. E_k ist linksadjungiert zu $G_{k+1,1}$, also $E_k \dashv G_{k+1,1}$.

Beweis. XXXX □

Lemma 61.2. $F_{k,i}$ ist linksadjungiert zu $G_{k+1,i+1}$, also $F_{k,i} \dashv G_{k+1,i+1}$.

Beweis. XXXX □

In der Kategorie $\mathbf{Top}^{(k)}$ der k -Tupel der topologischen Räume gibt es einen kanonischen Verschiebungsfunktor („S“ für „Shift“, englisch für „Verschiebung“):

$$(493) \quad \begin{aligned} & S_k := E_k \circ G_{k,k}: \mathbf{Top}^{(k)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(k-1)}, \\ & (X_k, X_{k-1}, \dots, X_1) \mapsto (X_{k-1}, \dots, X_1, \emptyset). \end{aligned}$$

62. AXIOMATISCHE HOMOLOGIE

Die axiomatische Homologie ist eine Abstraktion der grundlegenden Eigenschaften der singulären Homologie und der Untersuchung der daraus folgenden Eigenschaften.

Definition 62.1 (Homologietheorie). *Für einen Ring R ist eine Familie an homotopieinvarianten Funktoren:*

$$(494) \quad (H_n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbf{Top}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$$

welche die Eilenberg–Steenrod-Axiome erfüllt, von denen die ersten beiden die Eigenschaften eines Funktors sind:

- I.) $H_n(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{H_n(X,A)}$
- II.) $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$
- III.) $\partial_n \circ H_n(f) = H_n(f|_A) \circ \partial_n$

wird Homologietheorie genannt. [?, Def. 1.1]

$$(495) \quad \partial_* : H_*(X, B) \rightarrow H_{n-1}(B, A)$$

$$(496) \quad \partial^* : H^*(B, A) \rightarrow H^{*+1}(X, B)$$

Lemma 62.2. Für eine Homologietheorie $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist:

$$(497) \quad H_n(\mathcal{S}^k, \{*\}) \cong H_{n-k}(\{*\})$$

Beweis. □

Lemma 62.3.

$$(498) \quad H_*(X) \cong H_*(X, \{x\}) \oplus H_*(\{x\})$$

Beweis. □

$$(499) \quad H_n(\mathcal{S}^k) \cong H_n(\mathcal{S}^k, \{*\}) \oplus H_n(\{*\})$$

Axiom 62.4 (Ausschneidungsaxiom, Homologie). Eine Homologietheorie, für die für Raumtripel $A \subseteq B \subseteq X$ mit $\bar{A} \subseteq B^\circ$ die von der Inklusion $(X - A, B - A) \hookrightarrow (X, B)$ induzierte Abbildung:

$$(500) \quad H_n(X - A, B - A) \rightarrow H_n(X, B)$$

ein Isomorphismus ist, erfüllt das Ausschneidungsaxiom.

Für eine Homologietheorie, die das Ausschneidungsaxiom erfüllt, gilt $H_*(X, X) \cong H_*(X - X, X - X) = 0$.

Axiom 62.5 (Ausschneidungsaxiom, Kohomologie). Eine Kohomologietheorie, für die für Raumtripel $A \subseteq B \subseteq X$ mit $\bar{A} \subseteq B^\circ$ die von der Inklusion $(X - A, B - A) \hookrightarrow (X, B)$ induzierte Abbildung:

$$(501) \quad H_n(X, B) \rightarrow H_n(X - A, B - A)$$

ein Isomorphismus ist, erfüllt das Ausschneidungsaxiom.

Für eine Kohomologietheorie, die das Ausschneidungsaxiom erfüllt, gilt $H^*(X, X) \cong H^*(X - X, X - X) = 0$.

Definition 62.6 (Dimensionsaxiom, Homologie). Eine Homologietheorie, für die

$$(502) \quad H_n(\{*\}, G) = \begin{cases} G & ; n = 0 \\ 0 & ; n > 0 \end{cases}$$

erfüllt das Dimensionsaxiom.

Definition 62.7 (Dimensionsaxiom, Kohomologie). Eine Kohomologietheorie, für die

$$(503) \quad H^n(\{*\}, G) = \begin{cases} G & ; n = 0 \\ 0 & ; n > 0 \end{cases}$$

erfüllt das Dimensionsaxiom.

Definition 62.8 (Milnor-Axiom). Eine Homologietheorie, für die:

$$(504) \quad H_n \left(\bigvee_{i \in I} X_i, \{*\} \right) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i, \{*\})$$

erfüllt das Milnor-Axiom.

Satz 62.9 (Eindeutigkeitssatz von Eilenberg–Steenrod). *Jede natürliche Transformation zweier Homologietheorien, die ein Isomorphismus auf allen Sphären ist, ist auch einer auf allen endlichen CW-Komplexen.*

Erfüllen die beiden Homologietheorie darüber hinaus das Milnor-Axiom, ist die natürliche Transformation sogar ein Isomorphismus auf allen CW-Komplexen.

Wenn Abbildungen, die auf allen Homotopiegruppen $\pi_*(X)$ Isomorphismen induzieren, auch auf allen Homologiegruppen $H_*(X)$ Isomorphismen induzieren, ist die natürliche Transformation sogar ein Isomorphismus auf allen topologischen Räumen.

Beweis. □

Für $X \subseteq Y \subseteq Z$ gibt es kanonische Inklusionen $(Y, X) \hookrightarrow (Z, X) \hookrightarrow (Z, Y)$ von Raumpaaren und es gibt einen Randoperator:

$$(505) \quad \partial_*: H_*(Z, Y) \rightarrow H_{*-1}(Y, X)$$

mit dem sich eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(Z, Y) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(Y, X) \longrightarrow H_n(Z, X) \longrightarrow H_n(Z, Y) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(Y, X) \longrightarrow \dots$$

Für jede weitere Inklusion $X' \subseteq Y \subseteq Z$ und Abbildung $f: Z \rightarrow Z'$ mit $f(Y) \subseteq Y'$ und $f(X) \subseteq X'$ ist:

$$(506) \quad \begin{array}{ccc} \partial'_* \circ H_*(f) & = & H_{*-1}(f) \circ \partial_* \\ H_*(Z, Y) & \xrightarrow{H_*(f)} & H_*(Z, Y') \\ \partial_* \downarrow & & \partial'_* \downarrow \\ H_{*-1}(Y, X) & \xrightarrow{H_{*-1}(f)} & H_{*-1}(Y', X') \end{array}$$

∂_* ist eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathbf{Top3} \rightarrow \mathbf{GradMod}_R$.

Definition 62.10. *Eine Familie an Funktoren $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbf{Top2} \rightarrow \mathbf{GradMod}_R$ und eine Familie an natürlichen Transformationen $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbf{Top3} \rightarrow \mathbf{GradMod}_R$, für die: werden Homologietheorie genannt.*

Eine Homologietheorie, für die $H_n(\{*\}) = 0$ für $n \neq 0$ wird *gewöhnlich* genannt.

Satz 62.11 (Mayer–Vietoris-Sequenz). *Für einen topologischen Raum X , offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq X$ und $A \subset U_1 \cap U_2$*

$$(507) \quad \dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U_1 \cap U_2, A) \xrightarrow{(H_n(i_1), H_n(i_2))^T} H_n(U_1, A) \oplus H_n(U_2, A) \xrightarrow{(H_n(j_1), H_n(j_2))} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n}$$

Beweis. □

Für topologische Räume X und Y induzieren Inklusionen $i: X \hookrightarrow X \sqcup Y$ und $j: Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ einen Isomorphismus:

$$(508) \quad (H_*(i), H_*(j)): H_*(X) \oplus H_*(Y) \xrightarrow{\cong} H_*(X \sqcup Y)$$

Die offene Überdeckung von $X \sqcup Y$ durch X und Y führt zu einer Mayer–Vietoris-Sequenz:

$$(509) \quad 0 = H_n(X \cap Y = \emptyset) \rightarrow H_n(X) \oplus H_n(Y) \rightarrow H_n(X \sqcup Y) \rightarrow H_{n-1}(X \cap Y = \emptyset) = 0$$

Für endliche Indexmengen I folgt:

$$(510) \quad \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i) = H_* \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right)$$

$$(511) \quad H_n(U, *) \oplus H_n(V, *) \rightarrow H_n(S^n, *) \rightarrow H_n(U \cap V, *) \rightarrow H_{n-1}(U, *) \oplus H_{n-1}(V, *)$$

Da $U \cap V \simeq S^{n-1}$ folgt $H_n(U \cap V, *) \cong H_n(S^{n-1}, *)$.

62.1. REDUZIERTE HOMOLOGIETHEORIEN

Jede Homologietheorie H_n induziert eine reduzierte Homologietheorie \tilde{H}_n durch $\tilde{H}_n(X) := H_n(X, \{*\})$. Jede reduzierte Homologietheorie \tilde{H}_n induziert eine Homologietheorie H_n durch $H_n(X, A) = \tilde{H}_n(\text{Cone}(i))$ mit $i: A \hookrightarrow X$.

63. BETTI-ZAHL

Singuläre Homologie mit Koeffizienten in einem Körper mit verschwindender Charakteristik haben keine Torsion und stattdessen die Struktur eines Vektorraumes, deren Dimensionen betrachtet werden können. Dies sind die Betti-Zahlen, welche einfache und doch fundamental wichtige topologische Invarianten sind.

Definition 63.1 (Betti-Zahl). *Für einen topologischen Raum X sind:*

$$(512) \quad b_k(X) := \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X, \mathbb{Q})$$

dessen Betti-Zahlen.

Lemma 63.2. *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist:*

$$(513) \quad b_0(X) = 1$$

Beweis.

□

Lemma 63.3. *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(514) \quad H_n(X) = \bigoplus_{[x] \in X/\sim} H_n([x])$$

Beweis.

□

Basierend auf diesem Lemma lässt sich Lemma (??) verallgemeinern:

Korollar 63.4. *Die nullte Betti-Zahl ist die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten, für einen topologischen Raum X ist:*

$$(515) \quad b_0(X) = |X/\sim|$$

Beweis.

□

Satz 63.5. *Die erste Bettizahl ist gleich dem Rang der abelsierten Fundamentalgruppe, für einen topologischen Raum X ist:*

$$(516) \quad b_1(X) = \text{rk}(\pi_1^{\text{ab}}(X))$$

Beweis.

□

Satz 63.6. *Homotopieäquivalente topologische Räume X, Y haben gleiche Betti-Zahlen:*

$$(517) \quad X \simeq Y \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: b_n(X) = b_n(Y)$$

Insbesondere haben homöomorphe topologischen Räume gleiche Betti-Zahlen.

Beweis. Seien X, Y homotopieäquivalente topologische Räume. □

Lemma 63.7. *Für den einpunktigen topologischen Raum $\{x\}$ gilt:*

$$(518) \quad b_n(\{x\}) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

Beweis. □

Da \mathbb{R}^m und D^m homotopieäquivalent sind folgt mit diesem Lemma und Lemma (XXXX):

Korollar 63.8. *Für die Betti-Zahlen von \mathbb{R}^m und D^m :*

$$(519) \quad b_n(\mathbb{R}^m) = b_n(D^m) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

Satz 63.9. *Für die Betti-Zahlen von S^m mit $m \geq 1$ gilt mit Lemma (XXXX):*

$$(520) \quad b_n(S^m) = \begin{cases} 1 & , n = 0, m \\ 0 & , n \text{ sonst} \end{cases}$$

Beispiel 63.10. *Für die Betti-Zahlen von S^0 gilt mit Lemma (XXXX):*

$$(521) \quad b_n(S^0) = \begin{cases} 2 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

Satz 63.11 (Satz von Mayer–Vitoris). *Für einen nicht zusammenhängenden topologischen Raum X und nichtleere offene Mengen $U, V \subset X$ mit $X = U \cup V$ gibt es eine lange exakte Sequenz:*

$$(522) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \dots & & \rightarrow & H_{n+1}(X) \\ \rightarrow & H_n(U \cap V) & \rightarrow & H_n(U) \oplus H_n(V) & \rightarrow & H_n(X) & \\ \rightarrow & H_{n-1}(U \cap V) & \rightarrow & \dots & & & \end{array}$$

Beweis. □

Für X nicht zusammenhängend gibt es offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$. Aus dem Satz von Mayer-Vietoris (??) folgen kurze exakte Sequenzen:

$$(523) \quad 0 \rightarrow H_*(U) \oplus H_*(V) \rightarrow H_*(X) \rightarrow 0,$$

womit $H_*(X) \cong H_*(U) \oplus H_*(V)$.

Satz 63.12. *Für topologische Räume X, Y gilt:*

$$(524) \quad b_k(X \times Y) = \sum_{i+j=k} b_i(X)b_j(Y)$$

Beweis. □

64. EULER-CHARAKTERISTIK

Definition 64.1 (Euler-Charakteristik). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(525) \quad \chi(X) := \sum_i (-1)^i b_i(X)$$

dessen Euler-Charakteristik.

Aus Korollar (??) folgt:

$$(526) \quad \chi(\mathbb{R}^m) = \chi(D^m) = 1$$

Aus Satz (??) und Gleichung (??) folgt:

$$(527) \quad \chi(S^m) = \begin{cases} 1 & , m = 0 \\ 0 & , m \text{ ungerade} \\ 2 & , m \text{ gerade} \end{cases}$$

Aus Satz (??) folgt direkt:

Korollar 64.2. *Homotopieäquivalente topologische Räume X, Y haben die gleiche Euler-Charakteristik:*

$$(528) \quad X \simeq Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y)$$

Satz 64.3. *Für disjunkte topologische Räume X, Y gilt:*

$$(529) \quad \chi(X \dot{\cup} Y) = \chi(X) + \chi(Y)$$

Beweis. □

Satz 64.4. *Für topologische Räume X, Y gilt:*

$$(530) \quad \chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$$

Beweis. □

Satz 64.5. *Für topologische Räume X, Y gilt:*

$$(531) \quad \chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$$

Beweis.

$$(532) \quad \begin{aligned} \chi(X \times Y) &= \sum_k (-1)^k b_k(X \times Y) = \sum_k (-1)^k \sum_{i+j=k} b_i(X) b_j(Y) \\ &= \sum_k \sum_{i+j=k} (-1)^i b_i(X) (-1)^j b_j(Y) = \sum_i (-1)^i b_i(X) \sum_j (-1)^j b_j(Y) \\ &= \chi(X)\chi(Y) \end{aligned}$$

□

Beispiel 64.6. *Aus Satz (??) folgt mit Gleichung (??):*

$$(533) \quad \chi(T^n) = \chi(S^1)^n = 0.$$

Lemma 64.7. *Für eine n -fache Überlagerung $Y \rightarrow X$ ist $\chi(Y) = n\chi(X)$.*

Beweis. XXXX □

Gibt es für einen topologischen Raum X eine nicht einfache Überlagerung über sich selbst, dann ist $\chi(X) = 0$.

64.1. POINCARÉ-POLYNOM

Definition 64.8 (Poincaré-Polynom). *Für einen topologischen Raum X ist:*

$$(534) \quad P_X(Y) = \sum_i b_i(X)Y^i \in \mathbb{R}[Y]$$

dessen Poincaré-Polynom.

Aus Satz (??) folgt:

Korollar 64.9. *Homotopieäquivalente topologische Räume X, Y haben das gleiche Poincaré-Polynom:*

$$(535) \quad X \simeq Y \Rightarrow P_X = P_Y$$

Satz 64.10. *Für topologische Räume X, Y gilt:*

$$(536) \quad P_{X \times Y} = P_X P_Y$$

Beweis. □

65. ABBILDUNGSGRAD

Der *Abbildungsgrad* ist eine ganzzahlige topologische Invariante für stetige Abbildungen zwischen Sphären gleicher Dimension.

Definition 65.1 (Abbildungsgrad). *Für eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ ist die ganze Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ mit:*

$$(537) \quad H_n^{\text{sing}}(f): \mathbb{Z} \cong H_n^{\text{sing}}(S^n) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(S^n) \cong \mathbb{Z}, n \mapsto \deg(f)n$$

ihre Abbildungsgrad.

Aus den Funktoreigenschaften der singulären Homologie folgt $\deg(\text{id}) = 1$ für die Identität $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ sowie $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$ für stetige Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow S^n$. Da die singuläre Homologie homotopieinvariant ist, ist es ebenfalls der Abbildungsgrad; homotope stetige Abbildungen haben also den gleichen Abbildungsgrad. Für eine Homotopieäquivalenz $f: S^n \rightarrow S^n$ mit einer stetigen Abbildung $g: S^n \rightarrow S^n$, sodass $g \circ f \simeq \text{id}$ und $f \circ g \simeq \text{id}$, gilt daher $\deg(f) \cdot \deg(g) = 1$, also $\deg(f) = \pm 1$. Insbesondere ist $\deg: \text{Homeo}(S^n) \rightarrow \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 65.2. *Der Abbildungsgrad ist ein Gruppenisomorphismus:*

$$(538) \quad \deg: \pi_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

Beweis. Seien $f, g: S^n \rightarrow S^n$ stetige Abbildungen und sei $p_n: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ die kanonische Projektion, dann ist $[f] + [g] = (f \vee g) \circ p_n: S^n \rightarrow S^n$ deren Verknüpfung. XXXX □

Beispiel 65.3. *Mit der Identität $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ gilt $\deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1}$.*

Lemma 65.4. *Für n gerade ist \mathbb{Z}_2 die einzige nichttriviale Gruppe, die frei auf S^n wirken kann. [?, Prop 2.29]*

Beweis. Offenbar kann \mathbb{Z}_2 frei auf S^n wirken durch $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Homeo}(S^n), \pm 1 \mapsto \pm \text{id}$. Sei G eine Gruppe und $\phi: G \rightarrow \text{Homeo}(S^n)$ eine freie Gruppenwirkung, dann ist $\psi: G \xrightarrow{\phi} \text{Homeo}(S^n) \xrightarrow{\deg} \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ ein Gruppenhomomorphismus. XXXX Ist n gerade, dann ist $\ker(\psi)$ trivial und $G \cong \mathbb{Z}_2$ nach dem Homomorphiesatz. \square

Lemma 65.5. *Die Einhängung erhält den Abbildungsgrad. Für eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ (sowie ihre Einhängung $Sf: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$) gilt [?, Prop 2.33]:*

$$(539) \quad \deg(Sf) = \deg(f).$$

Beweis. XXXX \square

66. HOPF-INVARIANTE

Die *Hopf-Invariante* ist eine ganzzahlige topologische Invariante für stetige Abbildungen zwischen Sphären geeigneter verschiedener Dimension.

Definition 66.1 (Hopf-Invariante). *Für eine stetige Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ ist die ganze Zahl $\text{Hopf}(f) \in \mathbb{Z}$ mit:*

$$(540) \quad \text{XXXX}$$

ihre Hopf-Invariante.

Lemma 66.2. *Die Hopf-Invariante ist ein Gruppenhomomorphismus:*

$$(541) \quad \text{Hopf}: \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Beweis. Seien $f, g: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ stetige Abbildungen und sei $p_{2n-1}: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1} \vee S^{2n-1}$ die kanonische Projektion, dann ist $[f] + [g] = (f \vee g) \circ p_{2n-1}: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ deren Verknufung. XXXX \square

Lemma 66.3. *Für $n \in \mathbb{N}$ gerade ist:*

$$(542) \quad \text{Hopf}([\text{id}_{S^n}, \text{id}_{S^n}]) = 2.$$

Beweis. XXXX \square

Lemma 66.4. *Für eine stetige Abbildung $f: S^{2n-2} \rightarrow S^{n-1}$ ist $\text{Hopf}(\Sigma f) = 0$. [?, Aufgabe 7.4]*

Beweis. XXXX \square

Lemma 66.5. *Für eine stetige Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ sowie stetige Abbildungen $\varphi: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ und $\psi: S^n \rightarrow S^n$ ist: [?, Sec. 4.B Ex. 1] [?, Aufgabe 7.3]*

$$(543) \quad \text{Hopf}(\psi \circ f \circ \varphi) = \deg(\psi)^2 \text{Hopf}(f) \deg(\varphi).$$

Beweis. XXXX \square

Satz 66.6. *Wenn $n \neq 1, 2, 4, 8$, dann gibt es keine stetige Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow S^{n-1}$ mit Hopf-Invariante $\text{Hopf}(f) = 1$. [?, Thrm. 1.1.1. c)].*

Beweis. XXXX \square

67. KRONECKER-PAARUNG

Definition 67.1 (Kronecker-Paarung von Ketten und Koketten). *Für einen topologischen Raum X und einen Ring R ist:*

$$(544) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle: C^n(X; R) \times C_n(X) \rightarrow R, (f, z) \mapsto \langle f, z \rangle := f(z)$$

die Kronecker-Paarung von Ketten und Koketten.

XXXX

$$(545) \quad \langle \partial f, z \rangle = (\partial f)(z) = (f \circ d)(z) = f(dz) = \langle f, dz \rangle$$

Sei $[f] \in H^n(X; R)$ eine Kohomologiekategorie, bestehend aus Repräsentanten $f + \partial g$ mit $f \in XXXX$ und $g \in XXXX$. Sei $[z] \in H_n(X)$ eine Homologiekategorie, bestehend aus Repräsentanten $z + dy$ mit $z \in XXXX$ und $y \in XXXX$. Mit Gleichung (XXXX) folgt:

$$(546) \quad \begin{aligned} \langle f + \partial g, z + dy \rangle &= \langle f, z \rangle + \langle f, dy \rangle + \langle \partial g, z \rangle + \langle \partial g, dy \rangle \\ &= \langle f, z \rangle + \underbrace{\langle \partial f, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \partial g, dz \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle g, d^2 y \rangle}_{=0} = \langle f, z \rangle. \end{aligned}$$

Definition 67.2 (Kronecker-Paarung von Homologie und Kohomologie). *Für einen topologischen Raum X und einen Ring R ist:*

$$(547) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle: H^n(X; R) \times H_n(X) \rightarrow R, ([f], [z]) \mapsto \langle [f], [z] \rangle := f(z)$$

die Kronecker-Paarung von Homologie und Kohomologie.

Lemma 67.3. *Sei X ein topologischer Raum und R ein Ring. Gilt für Homologiekategorien $y, z \in H_n(X)$, dass $\langle \alpha, y \rangle = \langle \alpha, z \rangle$ für jede Kohomologiekategorie $\alpha \in H^n(X; R)$, dann ist $y = z$.*

Beweis. XXXX □

Lemma 67.4. *For a continuous map $g: X \rightarrow Y$ between topological spaces X and Y , a group G , a cohomology class $\varphi \in H^k(Y; G)$ and a homology class $\alpha \in H_k(X)$, one has: [?, Sekt. 7.2.]*

$$(548) \quad \langle g^* \varphi, \alpha \rangle = \langle \varphi, g_* \alpha \rangle.$$

Beweis. Let $f \in C^k(Y, G)$ with $[f] = \varphi \in H^k(Y; G)$ and let $x \in C_k(X)$ with $[x] = \alpha \in H_k(X)$, then:

$$\langle g^*[f], [x] \rangle = \langle [f \circ g], [x] \rangle = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \langle [f], [g(x)] \rangle = \langle [f], g_*[x] \rangle.$$

□

68. CUP-PRODUKT

Definition 68.1 (Cup-Produkt). *Für einen topologischen Raum X und einen Ring R ist:*

$$(549) \quad \smile: C^p(X; R) \times C^q(X; R) \rightarrow C^{p+q}(X; R), (\alpha \smile \beta)(\sigma) := \alpha(\sigma_p) \beta(\sigma_q)$$

das Cup-Produkt.

Lemma 68.2. *Das Cup-Produkt ist assoziativ und graduiert-kommutativ:*

$$(550) \quad (\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma)$$

$$(551) \quad \alpha \smile \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} (\alpha \smile \beta)$$

Beweis. XXXX □

Für ein ?? $\alpha \in H^p(X; G)$ mit ungeradem Grad folgt aus Gleichung (XXXX), dass $\alpha \smile \alpha = -\alpha \smile \alpha$, also $\alpha \smile \alpha = 0$.

Lemma 68.3. *Für den Korand des Cup-Produktes gilt:*

$$(552) \quad \partial(\alpha \smile \beta) = \partial\alpha \smile \beta + (-1)^p \alpha \smile \partial\beta$$

Beweis. XXXX

$$(553) \quad (\partial(\alpha \smile \beta))(\sigma) = (\alpha \smile \beta)(d\sigma) = \alpha((d\sigma)_p)\beta((d\sigma)_q)$$

□

Lemma 68.4. *Das Cup-Produkt vertauscht mit dem Rückzug entlang stetiger Abbildungen. Für topologische Räume X und Y und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist mit $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$: [?, Sekt. 7.2.]*

$$(554) \quad f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$

Beweis. XXXX □

Lemma 68.5. *Das Cup- und Cap-Produkt hängen zusammen über:*

$$(555) \quad \psi(\sigma \frown \phi) = (\phi \smile \psi)(\sigma)$$

Beweis. □

Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M ist $H^n(M; R) \cong R$, wodurch das Cup-Produkt eine Bilinearform:

$$(556) \quad H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) \rightarrow R$$

definiert.

Für einen topologischen Raum X ist $H^0(X; R) \cong R$, womit das Cap-Produkt eine Bilinearform:

$$(557) \quad H_n(X; R) \times H^n(X; R) \rightarrow R$$

definiert. Diese wird zu einem Homomorphismus:

$$(558) \quad H^n(X; R) \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(X; R), R)$$

69. SIGNATUR

Für eine kompakte geschlossene $4n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M ist $H^{4n}(M; R) \cong R$, wodurch das Cup-Produkt eine Bilinearform:

$$(559) \quad H^{2n}(M; R) \times H^{2n}(M; R) \rightarrow R$$

definiert. Die Signatur dieser Bilinearform ist die *Signatur* von M .

70. CAP-PRODUKT

Definition 70.1 (Cap-Produkt). Für einen topologischen Raum X und einen Ring R ist:

$$(560) \quad \frown : C^q(X; R) \times C_p(X; R) \rightarrow C_{p-q}(X; R), \alpha \frown z := \alpha({}_q z)z_{p-q}$$

das Cap-Produkt.

Seien $\alpha \in C^p(X; R)$, $\beta \in C^q(X; R)$ und $z \in C_{p+q+r}(X; R)$, dann ist:

$$(561) \quad (\alpha \smile \beta) \frown z = (\alpha \smile \beta)({}_{p+q} z)z_r = \dots = \alpha \frown (\beta({}_q z)z_r) = \alpha \frown (\beta \frown z)$$

$$(562) \quad \langle \alpha, \beta \frown z \rangle = \langle \alpha \smile \beta, z \rangle$$

Lemma 70.2. Für den Rand des Cup-Produktes gilt:

$$(563) \quad d(\alpha \frown z) = (-1)^{p-q} \partial \alpha \frown z + \alpha \frown dz$$

Beweis.

$$(564) \quad \begin{aligned} \langle \phi, d(\alpha \frown z) \rangle &= \langle \partial \phi, \alpha \frown z \rangle = \langle \partial \phi \smile \alpha, z \rangle = (-1)^{p-q} \langle \phi \smile \partial \alpha, z \rangle + \langle \partial(\phi \smile \alpha), z \rangle \\ &= (-1)^{p-q} \langle \phi, \partial \alpha \frown z \rangle + \langle \phi \smile \alpha, dz \rangle = (-1)^{p-q} \langle \phi, \partial \alpha \frown z \rangle + \langle \phi, \alpha \frown dz \rangle \end{aligned}$$

Aus Lemma (??) folgt die Behauptung. \square

Lemma 70.3 (Projektionsformel). Für topologische Räume X und Y und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist mit $f^*: C^*(Y) \rightarrow C^*(X)$ und $f_*: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ für alle $\alpha \in C^q(X; R)$ und $z \in C_p(Y; R)$: [?, Sekt. 7.2.]

$$(565) \quad \alpha \frown f_*(z) = f_*(f^*(\alpha) \frown z).$$

Beweis. Sei $\phi \in C^{p-q}(X; R)$ beliebig, dann ist:

$$(566) \quad \begin{aligned} \langle \phi, \alpha \frown f_*(z) \rangle &= \langle \phi \smile \alpha, f_*(\alpha) \rangle = \langle f^*(\phi \smile \alpha), z \rangle \\ &= \langle f^*(\phi) \smile f^*(\alpha), z \rangle = \langle f^*(\phi), f^*(\alpha) \frown z \rangle = \langle \phi, f_*(f^*(\alpha) \frown z) \rangle. \end{aligned}$$

Aus Lemma (??) folgt die Behauptung. \square

71. ORIENTIERUNG

71.1. LOKALE HOMO- UND KOHOMOLOGIE

Seien R ein Ring und $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}, (H^n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{GradMod}_R$ eine Homo- und Kohomologietheorie, welche das Ausschneidungsaxiom erfüllen.

Definition 71.1 (Lokale Homo- und Kohomologie). Für einen topologischen Raum X und einen abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq X$ sowie eine Gruppe G seien:

$$(567) \quad H_n(X|A; G) := H_n(X, X - A; G)$$

$$(568) \quad H^n(X|A; G) := H^n(X, X - A; G)$$

die lokale Homo- und Kohomologie von A .

Für einen Punkt $x \in X$ seien kurz $H_n(X|x; G) := H_n(X|\{x\}; G)$ und $H^n(X|x; G) := H^n(X|\{x\}; G)$. Für jede Umgebung $U \subset X$ von x ist mit der Anwendung der Ausschneidungsaxiome (??) und (??) auf das Raumtripel $U^c \subset \{x\}^c \subset X$ (wobei $\overline{\{x\}} \subset U^\circ$ gelten muss, was sicher erfüllt ist, wenn X ein T_1 -Raum ist und daher $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist):

$$(569) \quad H_n(X|x; G) \cong H_n(U|x; G)$$

$$(570) \quad H^n(X|x; G) \cong H^n(U|x; G),$$

weshalb die lokale Homologie und lokale Kohomologie eines Punktes x nur von einer Umgebung um diesen abhängen, was die Benennung begründet.

Lemma 71.2. *Nichtleere offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sind genau dann homöomorph, wenn $m = n$.*

Lemma 71.3. *Für eine geschlossene zusammenhängende n -Mannigfaltigkeit ist: [?, Crl. 3.28]*

$$(571) \quad \text{Tor } H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 1 & ; M \text{ orientierbar} \\ \mathbb{Z}_2 & ; M \text{ nicht orientierbar} \end{cases}$$

Etwa ist der Torus, eine geschlossene zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit, orientierbar und erfüllt $\text{Tor } H_1(K; \mathbb{Z}) = 1$ nach (XXXX) und die Kleinsche Flasche K , eine geschlossene zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit, nicht orientierbar und erfüllt $\text{Tor } H_1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ nach (XXXX).

Beweis. XXXX □

Lemma 71.4. *Für eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M und einen Punkt $x \in M$ ist:*

$$(572) \quad H_k(M|x; R) \cong H^k(M|x; R) \cong \begin{cases} R & ; k = n \\ 1 & ; k \neq n \end{cases}$$

Beweis. XXXX □

71.2. ORIENTIERUNG

Definition 71.5 (R -Orientierung, lokal). *Für eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M und $x \in M$ sowie einen Ring R ist ein Erzeuger $\mu_x \in H_n(M|x; R)$ eine R -Orientierung von M bei x .*

Die Anzahl der R -Orientierungen ist $|R^\times|$. Es gibt daher eine \mathbb{Z}_2 - und zwei \mathbb{Z} -Orientierungen.

Lemma 71.6. $\mathbb{C}P^n$ ist \mathbb{Z} -orientierbar.

Beweis. XXXX □

Definition 71.7 (R -Orientierung, global). *Für eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M und einen Ring R ist ein Erzeuger $\mu_x \in H_n(M|x; R)$ für jedes $x \in M$, sodass für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ und ein $\mu_U \in H_n(M|U; R)$ existiert mit:*

$$(573) \quad H_n(M|U; R) \rightarrow H_n(M|x; R), \mu_U \mapsto \mu_x$$

Lemma 71.8. *Jede topologische Mannigfaltigkeit ist \mathbb{Z}_2 -orientierbar.*

Beweis. XXXX □

Lemma 71.9. *Jede einfach zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit ist \mathbb{Z} -orientierbar.*

Beweis. XXXX □

Lemma 71.10. *Für einen Ring R und eine R -orientierbare topologische Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M ist dieser ebenfalls R -orientierbar.*

Beweis. XXXX □

72. HOMOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Definition 72.1 (Homologische Mannigfaltigkeiten). *Für eine abelsche Gruppe G ist ein lokalkompakter topologischer Raum X mit endlicher G -kohomologischer Dimension, sodass für jeden Punkt $x \in X$:*

$$(574) \quad H_k(X|x; G) \cong \begin{cases} 0 & ; k \neq n \\ G & ; k = n \end{cases}$$

eine n -dimensionale homologische Mannigfaltigkeit.

Lemma 72.2. *Topologische Mannigfaltigkeiten sind homologische Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Topologische Mannigfaltigkeiten sind insbesondere lokal euklidisch und daher lokalkompakt und erfüllen Gleichung (XXXX). XXXX □

Beispiel 72.3. *Die Einhängung der Poincaré-Homologiesphäre (einer 3-Homologiesphäre, die nicht homöomorph zur 3-Sphäre ist, siehe Beispiel (XXXX)) ist eine homologische Mannigfaltigkeit, die keine topologische Mannigfaltigkeit ist.*

Lemma 72.4. *Für topologische Mannigfaltigkeiten X und Y , sodass $X \times Y$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist, sind X und Y jeweils homologische Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. XXXX □

73. POINCARÉ-DUALITÄT

XXXX

Theorem 73.1 (Poincaré-Dualität). XXXX

Beweis. XXXX □

74. INJEKTIVE UND PROJEKTIVE AUFLÖSUNGEN

Ist $0 \rightarrow A \rightarrow P_0 \rightarrow \dots$ eine injektive Auflösung und $0 \rightarrow B \rightarrow B_0 \rightarrow \dots$ exakt, dann lässt sich jeder Homomorphismus $f: A \rightarrow B$ zu einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ergänzen.

Ist $\dots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ eine projektive Auflösung und $\dots \rightarrow B_0 \rightarrow B \rightarrow 0$ exakt, dann lässt sich jeder Homomorphismus $f: A \rightarrow B$ zu einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ \dots & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ergänzen.

Lemma 74.1 (Lemma von Schanuel). *Sei R ein Ring von M , P_1 , P_2 , K_1 und K_2 jeweils R -Linksmoduln, sodass P_1 und P_2 projektiv sind sowie:*

$$(575) \quad 0 \rightarrow K_1 \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$(576) \quad 0 \rightarrow K_2 \rightarrow P_2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

exakt, dann ist $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$.

Beweis. □

Für eine projektive Auflösung $\dots \rightarrow P_0 \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$, für die $\ker(f)$ projektiv ist, gilt dies für jede projektive Auflösung. Ist $\dots \rightarrow Q_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ eine weitere projektive Auflösung sind:

$$(577) \quad 0 \rightarrow \ker(f) \hookrightarrow P_0 \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

$$(578) \quad 0 \rightarrow \ker(g) \hookrightarrow Q_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

75. FASERN UND KOFASERN

Definition 75.1 (Exaktheit). *Eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume, für die $g \circ f$ konstant ist, also $g \circ f = \text{const}_{z_0}$, wird exakt genannt.*

Definition 75.2 (Faser). *Für eine stetige punktierte Abbildung $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume wird $\text{Fib}(g) := g^{-1}(z_0)$ auch ihre Faser genannt.*

Es gibt eine kanonische Injektion $i: (\text{Fib}(g), y_0) \hookrightarrow (Y, y_0)$. Die Faser lässt sich auch als Faserprodukt darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Fib}(g) & \longrightarrow & \{z_0\} \\ i \downarrow & & \downarrow \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{g} & (Z, z_0) \end{array}$$

Lemma 75.3. *Eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume ist genau dann exakt, wenn f über $\text{Fib}(g)$ faktorisiert.*

Beweis.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Fib}(g) & & \\ & \nearrow f' & & \searrow i & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

\Rightarrow : Für alle $x \in X$ gilt $(g \circ f)(x) = z_0$, also $f(x) \in g^{-1}(z_0) = \text{Fib}(g)$. \Leftarrow : Für alle $x \in X$ gilt $(g \circ f)(x) = (g \circ i \circ f')(x) = (g \circ f')(x) \in g(\text{Fib}(g)) = g(g^{-1}(z_0)) = \{z_0\}$. □

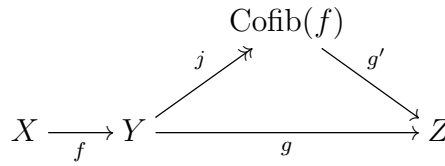
Definition 75.4 (Kofaser). *Für eine stetige punktierte Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ punktierter topologischer Räume wird $\text{Cofib}(f) = Y/\text{img}(f)$ auch ihre Kofaser genannt.*

Es gibt eine kanonische Surjektion $j: Y \twoheadrightarrow Y/\text{img}(f)$. Die Kofaser lässt sich auch als Kofaserprodukt darstellen:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\ j \downarrow & & \downarrow \\ \{x_0\} & \longrightarrow & \text{Cofib}(f) \end{array}$$

Lemma 75.5. *Eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume ist genau dann exakt, wenn g über $\text{Cofib}(f)$ faktorisiert.*

Beweis.



□

76. HOMOTOPIEFASER UND -KOFASER

Definition 76.1 (*h-Exaktheit, nicht punktiert*). *Eine kurze Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ topologischer Räume, für die $g \circ f$ nullhomotop ist, also $g \circ f \simeq \text{const}$, wird h-exakt genannt.*

Lemma 76.2. *Für eine kurze Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ topologischer Räume gilt:*

- I.) *Ist f nullhomotop, dann ist $g \circ f$ nullhomotop.*
- II.) *Ist g nullhomotop, dann ist $g \circ f$ nullhomotop.*

Beweis. I.) Nach Lemma (XXXX) faktorisiert f über CX , womit $g \circ f$ über CX faktorisiert und nach Lemma (XXXX) nullhomotop ist. □

Definition 76.3 (*h-Exaktheit, punktiert*). *Eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume, für die $g \circ f$ nullhomotop relativ z_0 ist, wird h-exakt genannt.*

Lemma 76.4. *Für eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume gilt:*

- I.) *Ist f nullhomotop relativ y_0 , dann ist $g \circ f$ nullhomotop relativ z_0 .*
- II.) *Ist g nullhomotop relativ z_0 , dann ist $g \circ f$ nullhomotop relativ z_0 .*

Beweis. I.) Nach Lemma (??) faktorisiert f über $C(X, x_0)$, womit $g \circ f$ über $C(X, x_0)$ faktorisiert und nach Lemma (??) nullhomotop ist. II.) Nach Lemma (??) faktorisiert g über $P(Z, z_0)$, womit $g \circ f$ über $P(Z, z_0)$ faktorisiert und nach Lemma (??) nullhomotop ist. □

76.1. HOMOTOPIEFASER

Definition 76.5 (*Homotopiefaser*). *Für topologische Räume Y und Z , einen Punkt $z \in Z$ sowie eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow Z$ ist das Kofaserprodukt:*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hofib}_z(g) & \longrightarrow & P(Z, z) \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \gamma \mapsto \gamma(1) \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

oder explizit:

$$(579) \quad \text{Hofib}_z(g) := \{(y, \gamma) \in Y \times Z^{[0;1]} \mid \gamma(0) = z, \gamma(1) = g(y)\}$$

die Homotopiefaser von g in z .

Für weitere topologische Räume W und X , einen Punkt $x_0 \in X$ sowie eine stetige Abbildungen $f: W \rightarrow X$ ist:

$$(580) \quad \text{Hofib}_{(x_0, z_0)}(f \times g) = \text{Hofib}_{x_0}(f) \times \text{Hofib}_{z_0}(g).$$

Beispiel 76.6 (Wegraum als Homotopiefaser). *Der Wegraum ist eine spezielle Homotopiefaser. Für einen topologischen Raum X und einen Punkt $x_0 \in X$ ist für die Identität $\text{id}_X: X \hookrightarrow X, x \mapsto x$:*

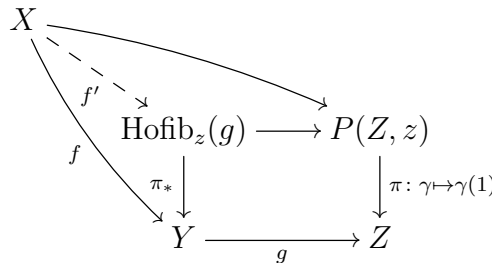
$$(581) \quad \text{Hofib}_{x_0}(\text{id}_X) = \{(x, \gamma) \in X \times X^{[0;1]} \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = \text{id}_X(x) = x\} \cong P(X, x_0).$$

Beispiel 76.7 (Schleifenraum als Homotopiefaser). *Der Schleifenraum ist eine spezielle Homotopiefaser. Für einen topologischen Raum X und einen Punkt $x_0 \in X$ ist für die kanonische Inklusion $i: \{x_0\} \hookrightarrow X, x_0 \mapsto x_0$:*

$$(582) \quad \text{Hofib}_{x_0}(i) = \{(x, \gamma) \in \{x_0\} \times X^{[0;1]} \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = i(x_0) = x_0\} \cong \Omega(X, x_0).$$

Lemma 76.8. *Eine kurze Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume ist genau dann h -exakt, wenn f über $\text{Hofib}_{z_0}(g)$ faktorisiert, also eine stetige punktierte Abbildung $f': (X, x_0) \rightarrow \text{Hofib}_{z_0}(g)$ mit $f = \pi_* \circ f'$ existiert.*

Beweis.



\Rightarrow : Nach Lemma (??) faktorisiert $g \circ f$ über $P(Z, z)$, womit das äußere Quadrat im obigen Diagramm kommutiert. Die Behauptung folgt aus der Existenz des universellen Morphismus. \Leftarrow : Da die Abbildung $\pi_* \circ g$ im obigen Diagramm über $P(Z, z)$ faktorisiert, ist sie nach Lemma (??) nullhomotop, womit $g \circ f = g \circ \pi_* \circ f'$ nach Lemma (XXXX) nullhomotop ist. \square

In einer kurzen h -exakten Sequenz von topologischen Räumen faktorisiert die erste Abbildung über die Homotopiefaser der zweiten, analog wie in einer kurzen exakten Sequenz von Gruppen die erste über den Kern der zweiten faktorisiert.

Es gibt kanonische Abbildungen:

$$(583) \quad Y \rightarrow \text{Hofib}_{g(y)}(g), y \mapsto (y, \text{const}_{g(y)})$$

$$(584) \quad \rho: \Omega(Z, g(y)) \rightarrow \text{Hofib}_{g(y)}(g), \gamma \mapsto (y, \gamma).$$

Da $\pi_* \circ g$ über $P(Z, z)$ faktorisiert, ist es nach Lemma (XXXX) nullhomotop. Für einen punktierten topologischen Raum X ist daher:

$$(585) \quad [X, \text{Hofib}_z(g)]_* \xrightarrow{\pi_* \circ -} [X, Y]_* \xrightarrow{g \circ -} [X, Z]_*$$

eine h -exakte Sequenz.

Für eine Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume gibt es kanonische Abbildungen:

$$(586) \quad \phi := \text{id}_X \times g_*: \text{Hofib}(f) \rightarrow \text{Hofib}(g \circ f), (x, \gamma) \mapsto (x, g \circ \gamma)$$

$$(587) \quad \psi := f \times \text{id}_{Z^{[0;1]}}: \text{Hofib}(g \circ f) \rightarrow \text{Hofib}(g), (x, \gamma) \mapsto (f(x), \gamma)$$

$$(588) \quad \psi \circ \phi: f \times g_*: \text{Hofib}(f) \rightarrow \text{Hofib}(g), (x, \gamma) \mapsto (f(x), g \circ \gamma)$$

Alternativ ist ψ der universelle Morphismus des Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hofib}_z(g \circ f) & & & & \\
 \pi_* \downarrow & \searrow \psi & & & \\
 X & & \text{Hofib}_z(g) & \longrightarrow & P(Z, z) \\
 & \searrow f & \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi: \gamma \mapsto \gamma(1) \\
 & & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

ϕ und ψ sind wohldefiniert. Sei $(x, \gamma) \in \text{Hofib}(f)$, dann ist $\gamma(0) = f(x)$ und $\gamma(1) = y_0$, also $(g \circ \gamma)(0) = (g \circ f)(x)$ und $(g \circ \gamma)(1) = g(y_0) = z_0$, womit $(x, \gamma) \in \text{Hofib}(g \circ f)$. Sei $(x, \gamma) \in \text{Hofib}(g \circ f)$, dann ist $\gamma(0) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ und $\gamma(1) = z_0$, also $(f(x), \gamma) \in \text{Hofib}(g)$. ϕ und ψ sind als Produkt von stetigen Abbildungen stetig.

Die ausgezeichneten Punkte von $\text{Hofib}(f)$, $\text{Hofib}(g)$ und $\text{Hofib}(g \circ f)$ sind jeweils $(x_0, \text{const}_{y_0})$, $(y_0, \text{const}_{z_0})$ und $(x_0, \text{const}_{z_0})$. Die ausgezeichneten Punkte von $\text{Hofib}(\phi)$, $\text{Hofib}(\psi)$ und $\text{Hofib}(\psi \circ \phi)$ sind jeweils $((x_0, \text{const}_{y_0}), \text{const}_{(x_0, \text{const}_{z_0})})$, $((x_0, \text{const}_{z_0}), \text{const}_{(y_0, \text{const}_{z_0})})$ und $((x_0, \text{const}_{y_0}), \text{const}_{(y_0, \text{const}_{z_0})})$.

Aus dem Satz von Puppe (??) folgt die Existenz langer exakter Sequenzen:

$$(589) \quad \begin{array}{l} \dots \xrightarrow{\pi_0 \Omega \rho} \pi_1 \text{Hofib}(\phi) \xrightarrow{\pi_0 \Omega \pi} \pi_1 \text{Hofib}(f) \xrightarrow{\pi_0 \Omega \phi} \pi_1 \text{Hofib}(g \circ f) \\ \xrightarrow{\pi_0 \rho} \pi_0 \text{Hofib}(\phi) \xrightarrow{\pi_0 \pi} \pi_0 \text{Hofib}(f) \xrightarrow{\pi_0 \phi} \pi_0 \text{Hofib}(g \circ f) \end{array}$$

$$(590) \quad \begin{array}{l} \dots \xrightarrow{\pi_0 \Omega \rho} \pi_1 \text{Hofib}(\psi) \xrightarrow{\pi_0 \Omega \pi} \pi_1 \text{Hofib}(g \circ f) \xrightarrow{\pi_0 \Omega \psi} \pi_1 \text{Hofib}(g) \\ \xrightarrow{\pi_0 \rho} \pi_0 \text{Hofib}(\psi) \xrightarrow{\pi_0 \pi} \pi_0 \text{Hofib}(g \circ f) \xrightarrow{\pi_0 \psi} \pi_0 \text{Hofib}(g) \end{array}$$

Die Behauptung folgt, wenn $\pi_n \text{Hofib}(\phi) \cong \pi_{n+1} \text{Hofib}(g)$ oder $\pi_n \text{Hofib}(\psi) = \pi_n \text{Hofib}(f)$. Diese Behauptungen folgen jeweils, wenn $\text{Hofib}(\phi) \cong \Omega \text{Hofib}(g)$ oder $\text{Hofib}(\psi) \cong \text{Hofib}(f)$.

Lemma 76.9. Für punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $\text{Hofib}_{y_0}(f)$ schwach zusammenziehbar ist, also $\text{Hofib}_{y_0}(f) \rightarrow \{*\}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Beweis. XXXX □

77. PUPPE-SEQUENZ

Satz 77.1 (Satz von Puppe). Für punktierte topologische Räume (X, x) und (Y, y) sowie eine stetige Abbildung $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ist die Sequenz:

$$(591) \quad \begin{array}{l} \dots \xrightarrow{\Omega \rho} \Omega \text{Hofib}_y(f) \xrightarrow{\Omega \pi} \Omega(X, x) \xrightarrow{\Omega f} \Omega(Y, y) \\ \xrightarrow{\rho} \text{Hofib}_y(f) \xrightarrow{\pi} (X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \end{array}$$

h-exakt.

Beweis. Die Exaktheit der Zeilen folgt aus Gleichung (??) mit $Z = S^n$. □

Durch Anwendung von π_0 ergibt sich mit $\pi_n = \pi_0 \circ \Omega^n$, dass die Sequenz:

$$(592) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\pi_0 \Omega \rho} & \pi_1 \operatorname{Hofib}_y(f) & \xrightarrow{\pi_0 \Omega \pi} & \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\pi_0 \Omega f} & \pi_1(Y, y) \\ & & \xrightarrow{\pi_0 \rho} & \pi_0 \operatorname{Hofib}_y(f) & \xrightarrow{\pi_0 \pi} & \pi_0(X, x) & \xrightarrow{\pi_0 f} & \pi_0(Y, y) \end{array}$$

h -exakt ist.

77.1. EXAKTE PUPPE-SEQUENZ

Korollar 77.2 (Exakte Puppe-Sequenz). *Für eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) ist die lange Sequenz:*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \dots \\ & & & \swarrow & \\ \Omega \operatorname{Hofib}_{y_0}(f) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0) & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega(Y, y_0) \\ & & & \swarrow & \\ \operatorname{Hofib}_{y_0}(f) & \longrightarrow & (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

exakt (in $\operatorname{Ho}(\mathbf{Top}_*)$).

Durch Anwendung von $[S^0, -]_*$ ergibt sich mit Lemma (XXXX) eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \dots \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, y_0) \\ & & & \swarrow & \\ \pi_n(\operatorname{Hofib}_{y_0}(f), *) & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ & & & \swarrow & \\ \pi_{n-1}(\operatorname{Hofib}_{y_0}(f), *) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Korollar 77.3. *Eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) induziert genau dann Isomorphismen zwischen allen Homotopiegruppen, wenn alle Homotopiegruppen von $\operatorname{Hofib}_{y_0}(f)$ trivial sind.*

77.2. KOEXAKTE PUPPE-SEQUENZ

Korollar 77.4 (Koexakte Puppe-Sequenz). *Für eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) ist die lange Sequenz:*

$$\begin{array}{ccccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) & \longrightarrow & \operatorname{Cone}(f) \\ & & & \swarrow & \\ \Sigma(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma(Y, y_0) & \longrightarrow & \operatorname{Cone}(\Sigma f) \\ & & & \swarrow & \\ \dots & & & & \end{array}$$

koexakt (in $\operatorname{Ho}(\mathbf{Top}_*)$).

Durch Anwendung von $[-, K(G, n)]_*$ ergibt sich mit Lemma (XXXX) eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^{n+1}(\text{Cone}(f); G) \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_{\text{sing}}^n(X; G) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(Y; G) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(\text{Cone}(f); G) & & \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_{\text{sing}}^{n-1}(X; G) & \longrightarrow & \dots & & & &
 \end{array}$$

Korollar 77.5. *Eine stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) induziert genau dann Isomorphismen zwischen allen Kohomologiegruppen (mit Einträgen in einer abelschen Gruppe G), wenn alle Kohomologiegruppen von $\text{Cone}(f)$ (mit Einträgen in G) trivial sind.*

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \{*\} \\
 \downarrow x \mapsto [(x,0)] & & \downarrow & & \downarrow \\
 CX & \longrightarrow & \text{Cone}(f) & \longrightarrow & \Sigma X
 \end{array}$$

Die Sequenz $X \rightarrow Y \rightarrow \text{Cone}(f)$ ist h -exakt nach Lemma (XXXX), da sie über CX faktorisiert. Die Sequenz $Y \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow \Sigma X$ ist exakt (also insbesondere h -exakt), da sie über $\{*\}$ faktorisiert. Die Sequenz $\text{Cone}(f) \rightarrow \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ ist h -exakt, da XXXX.

Eine alternative Möglichkeit für die koexakte Puppe-Folge ergäbe sich aus den beiden Kofaserprodukten:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \{*\} \\
 \downarrow x \mapsto (x,0) & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times [0; 1] & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) & \longrightarrow & CX
 \end{array}$$

Jedoch ist die Sequenz $X \rightarrow Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ ist nicht unbedingt h -exakt, etwa für $X = S^1$, $Y = S^1$ und $f = \text{id}: S^1 \rightarrow S^1$ ergibt sich die nicht h -exakte Sequenz $S^1 \xrightarrow{\text{id}} S^1 \xrightarrow{x \mapsto (x,0)} S^1 \times [0; 1]$.

78. SATZ VON BLAKERS–MASSEY

Satz 78.1 (Satz von Blakers–Massey). *Für einen topologischen Raum X und Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $X = U^\circ \cup V^\circ$, sodass $U \cap V \rightarrow U$ m -zusammenhängend und $U \cap V \rightarrow V$ n -zusammenhängend ist, ist $U \cap V \rightarrow U \times_X^h V$ $(m + n - 1)$ -zusammenhängend.*

Insbesondere ist $\text{Hofib}_u(U \cap V \rightarrow U) \rightarrow \text{Hofib}_u(V \rightarrow X)$ $(m + n - 1)$ -zusammenhängend.

Beweis. □

Korollar 78.2. *Für ein h -kokartesisches Quadrat:*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 Y & \xrightarrow{g'} & Z
 \end{array}$$

mit f m -zusammenhängend und g n -zusammenhängend ist $A \rightarrow X \overset{h}{\times}_Z Y$ $(m+n-1)$ -zusammenhängend.

Korollar 78.3. Für X m -zusammenhängend und Y n -zusammenhängend ist $X \vee Y \rightarrow X \times Y$ $m+n-1$ -zusammenhängend.

79. EILENBERG–MACLANE-RÄUME

Eilenberg–MacLane-Räume dienen in der Homotopietheorie als Bausteine für die Konstruktion von CW-Komplexen mit fest vorgelegten Homotopiegruppen. Das hat weiterführende Anwendung in der Berechnung der Homotopiegruppen von Sphären oder der Kohomologie von beliebigen topologischen Räumen.

Definition 79.1 (Eilenberg–MacLane-Raum). Ein zusammenhängender Raum X , für den für eine natürliche Zahl $n > 0$ und eine Gruppe G (abelsch, wenn $n > 1$):

$$(593) \quad \pi_k(X) \cong \begin{cases} 1 & ; k \neq n \\ G & ; k = n \end{cases}$$

ist ein Eilenberg–MacLane-Raum von Typ $K(G, n)$.

Satz 79.2. Für eine natürliche Zahl $n > 0$ und eine Gruppe G (abelsch, wenn $n > 1$) gibt es bis auf schwache Homotopieäquivalenz genau einen Eilenberg–MacLane Raum vom Typ $K(G, n)$.

Beweis. Existenz: XXXX, Eindeutigkeit: XXXX □

Da die n -te Homotopiegruppe eines Produktes topologischer Räume nach Satz (??) (für $n = 1$) und Satz (??) (für $n > 1$) isomorph zum Produkt der n -ten einzelnen Homotopiegruppen der topologischen Räume ist (also Homotopiegruppen mit Produkten kommutieren), folgt für zwei Gruppen G und H mit der Eindeutigkeit der Eilenberg–MacLane-Räume bis auf schwache Homotopieäquivalenz nach Satz (??) direkt: [?, Ex. 1B.5.]

$$(594) \quad K(G \oplus H, n) \overset{\text{whe}}{\cong} K(G, n) \times K(H, n).$$

Da der Schleifenraum die Homotopiegruppen eines punktierten topologischen Raumes nach Satz (??) um eins hinauf verschiebt, folgt mit der Eindeutigkeit der Eilenberg–MacLane-Räume bis auf schwache Homotopieäquivalenz nach Satz (??) direkt:

Korollar 79.3. Der Schleifenraum eines Eilenberg–MacLane-Raumes ist (bis auf schwache Homotopieäquivalenz) wieder ein Eilenberg–MacLane-Raum. Für eine Gruppe G und eine natürliche Zahl n ist:

$$(595) \quad \Omega K(G, n) \overset{\text{whe}}{\cong} K(G, n-1).$$

Vergleiche mit Korollar (??); ein duales Resultat gilt für den Aufstieg von Moore-Räumen mit der Einhängung Σ .

Beispiel 79.4. Die 1-Sphäre ist ein Eilenberg–MacLane-Raum. Aus den Lemmata (??) und (??) folgt: [?, Ex. 1B.1.]

$$(596) \quad K(\mathbb{Z}, 1) \overset{\text{whe}}{\cong} S^1.$$

Mit Gleichung (??) folgt: [?, Ex. 1B.5.]

$$(597) \quad K(\mathbb{Z}^n, 1) \overset{\text{whe}}{\cong} K(\mathbb{Z}, 1)^n \overset{\text{whe}}{\cong} (S^1)^n = T^n.$$

Beispiel 79.5. Der unendlich reell projektive Raum ist ein Eilenberg–MacLane-Raum. Aus Gleichung (??) folgt: [?, Ex. 1B.3.]

$$(598) \quad K(\mathbb{Z}_2, 1) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \mathbb{R}P^\infty.$$

Beispiel 79.6. Der unendlich komplex projektive Raum ist ein Eilenberg–MacLane-Raum. Aus Gleichung (??) folgt:

$$(599) \quad K(\mathbb{Z}, 2) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \mathbb{C}P^\infty.$$

$$(600) \quad \Omega \mathbb{R}P^\infty \simeq S^0$$

$$(601) \quad \Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$$

Satz 79.7. Für eine natürliche Zahl $n > 0$ und eine Gruppe G (abelsch, wenn $n > 1$) sowie einen Gruppenisomorphismus $\alpha: \pi_n K(G, n) \xrightarrow{\cong} G$ gibt es für jeden topologischen Raum X einen Gruppenisomorphismus $\beta_X: [X, K(G, n)] \xrightarrow{\cong} H_{\text{sing}}^n(X, G)$, sodass:

$$(602) \quad \alpha: \pi_n(K(G, n)) = [S^n, K(G, n)] \xrightarrow{\beta_{S^n}} H_{\text{sing}}^n(S^n, G) \cong G.$$

Beweis. XXXX □

Korollar 79.8. Die erste Kohomotopie und die erste singuläre Kohomologie sind isomorph, da mit Gleichung (??) und Satz (XXXX):

$$(603) \quad \pi^1 \cong [-, S^1] \cong [-, K(\mathbb{Z}, 1)] \cong H_{\text{sing}}^1(-, \mathbb{Z}).$$

Korollar 79.9. Für eine abelsche Gruppe G ist mit Satz (??):

$$(604) \quad \begin{aligned} [-, K(G, 1)] &\cong H_{\text{sing}}^1(-; G) \cong \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1^{\text{sing}}(-), G) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(\pi_1(-)^{\text{ab}}, G) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(-), G). \end{aligned}$$

Beweis. (Siehe Allen Hatcher, Aufgabe 2 in Kapitel 4) XXXX □

Für einen topologischen Raum X mit abelscher Fundamentalgruppe $G = \pi_1(X)$ ist nach Korollar (??):

$$(605) \quad [X, K(\pi_1(X), 1)] \cong H_{\text{sing}}^1(X; \pi_1(X)) \cong \text{End } \pi_1(X),$$

wobei die Identität von $\pi_1(X)$ unter dem Isomorphismus der Homotopieklasse der durch die zweite Moore–Postnikov-Faktorisierung der terminalen Abbildung $X \xrightarrow{!} \{*\}$ entstehende Abbildung $X \rightarrow K(\pi_1(X), 1)$ aus Gleichung (??) ist.

Mit $G = \mathbb{Z}$ folgt aus der Kombination der Korollare (??) und (??):

$$(606) \quad \pi^1(-) \cong \text{Hom}(\pi_1(-), \mathbb{Z})$$

Korollar 79.10. Sei X ein topologischer Raum mit:

- I.) $\pi_1(X) \cong H_1^{\text{sing}}(X) \cong 1$, dann ist $\pi^1(X) \cong H_{\text{sing}}^1(X) \cong 1$.
- II.) $\pi_1(X) \cong H_1^{\text{sing}}(X) \cong \mathbb{Z}_n$, dann ist $\pi^1(X) \cong H_{\text{sing}}^1(X) \cong 1$.
- III.) $\pi_1(X) \cong H_1^{\text{sing}}(X) \cong \mathbb{Z}$, dann ist $\pi^1(X) \cong H_{\text{sing}}^1(X) \cong \mathbb{Z}$.

Lemma 79.11. Für eine abelsche Gruppe G und $n > 1$ ist:

$$(607) \quad H_n(K(G, n); \mathbb{Z}) \cong G;$$

$$(608) \quad H_{n+1}(K(G, n); \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Beweis. $K(G, n)$ ist $(n - 1)$ -zusammenhängend, daher folgt die Behauptung direkt aus dem Hurewicz-Theorem. \square

Siehe [?], Sektion 4.2., Aufgabe 22. Mit den Gleichungen (??) und (??) sowie den Gleichungen (XXXX) und (XXXX) sind zwei Beispiele für dieses Lemma:

$$(609) \quad H_3(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) = H_3(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \text{????}$$

$$(610) \quad H_5(K(\mathbb{Q}, 4); \mathbb{Z}) = H_5(\mathbb{H}P^\infty; \mathbb{Z}) = \text{????}$$

Beweis. XXXX \square

79.1. KAN–THURSTON-THEOREM

Theorem 79.12 (Kan–Thurston-Theorem). Jeder wegzusammenhängende Raum ist homologieäquivalent zum Eilenberg–MacLane-Raum $K(G, 1)$ einer diskreten Gruppe G .

Beweis. XXXX \square

79.2. RATIONALE EILENBERG–MACLAKE-RÄUE

Definition 79.13 (Eilenberg–MacLane-Raum). Ein zusammenhängender Raum X , für den für eine natürliche Zahl $n > 0$ und eine Gruppe G :

$$(611) \quad \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \begin{cases} 1 & ; k \neq n \\ G & ; k = n \end{cases}$$

ist ein rationaler Eilenberg–MacLane-Raum von Typ $K(G, n)_\mathbb{Q}$.

80. MOORE-RÄUME

Definition 80.1 (Moore-Raum). Ein zusammenhängender Raum X , für den mit einer Gruppe G und einer natürlichen Zahl n :

$$(612) \quad \tilde{H}_k^{\text{sing}}(X) \cong 0; k \neq n$$

$$(613) \quad H_n^{\text{sing}}(X) \cong G$$

ist ein Moore-Raum vom Typ $M(G, n)$.

Satz 80.2. XXXX gibt es bis auf schwache Homotopieäquivalenz genau einen Moore-Raum vom Typ $M(G, n)$.

Beweis. Existenz: XXXX, Eindeutigkeit: XXXX \square

Zwar ist die n -te Homologiegruppe einer disjunkten Vereinigung topologischer Räume nach XXXX isomorph zum Produkt der n -ten einzelnen Homologiegruppen der topologischen Räume, aber für zwei Gruppen G und H folgt mit der Eindeutigkeit der Moore-Räume auf schwache Homotopieäquivalenz nach Satz (??) **nicht** das zu Gleichung (??) für Eilenberg–MacLane-Räume analoge Resultat, also:

$$(614) \quad M(G \oplus H, n) \stackrel{\text{whe}}{\not\cong} M(G, n) \sqcup M(H, n),$$

denn der rechte Raum ist nicht zusammenhängend, wie in der Definition (??) eines Moore-Raumes gefordert.

Da die Einhängung die Homologiegruppen eines punktierten topologischen Raumes nach

Satz (XXXX) um eins hinab verschiebt, folgt mit der Eindeutigkeit der Moore-Räume bis auf schwache Homotopieäquivalenz nach Satz (??) direkt:

Korollar 80.3. *Die Einhängung eines Moore-Raumes ist wieder ein Moore-Raum. Für eine Gruppe G und eine natürliche Zahl n ist:*

$$(615) \quad \Sigma M(G, n) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} M(G, n+1).$$

Vergleiche mit Korollar (??); ein duales Resultat gilt für den Abstieg von Eilenberg–MacLane-Räumen mit dem Schleifenraum Ω .

Beispiel 80.4. *Die Sphären sind Moore-Räume. Aus Gleichung (??) folgt:*

$$(616) \quad M(\mathbb{Z}, n) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} S^n.$$

Beispiel 80.5. *Die reelle projektive Ebene ist ein Moore-Raum. Aus Gleichung (XXXX) folgt:*

$$(617) \quad M(\mathbb{Z}_2, 1) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \mathbb{R}P^2.$$

Mit Korollar (??) folgt allgemeiner:

$$(618) \quad M(\mathbb{Z}_2, n+1) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \Sigma^n \mathbb{R}P^2.$$

Beispiel 80.6. *Die Kleinsche Flasche ist ein Moore-Raum. Aus Gleichung (XXXX) folgt:*

$$(619) \quad M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, 1) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} K.$$

Mit Korollar (??) folgt allgemeiner:

$$(620) \quad M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n+1) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \Sigma^n K.$$

81. PETERSON-RÄUME

Beispiel 81.1. *Die reell projektive Ebene ist ein Peterson-Raum. Aus Gleichung (XXXX) folgt:*

$$(621) \quad P(\mathbb{Z}_2, 2) \stackrel{\text{whe}}{\simeq} \mathbb{R}P^2.$$

82. BROWNSCHER DARSTELLUNGSSATZ

Homotopiegruppen sind als darstellbare Funktoren und Kohomotopiemengen sind als kodarstellbare Funktoren definiert. Kohomologien stellen sich nachträglich auch als kodarstellbare Funktoren heraus während Homotopiegruppen weder darstellbare noch kodarstellbare Funktoren sind. Allgemeiner lässt sich für Funktoren aus der Homotopiekategorie der punktierten zusammenhängenden CW-Komplexe untersuchen, welche Eigenschaften für die Darstellbarkeit notwendig sind.

Satz 82.1 (Brownscher Darstellungssatz). *Ein Funktor $F: \text{Ho}(\mathbf{ConnCW}_*)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, der Koproducte (Wedge-Summen) auf Produkte und Homotopiekofaserprodukte auf schwache Faserprodukte abbildet, ist darstellbar. Es existiert also ein punktierter zusammenhängender CW-Komplex Y mit $F \cong \text{Ho}(\mathbf{ConnCW}_*)(-, Y)$.*

Beweis. XXXX

□

Für die singuläre Kohomologie $H_{\text{sing}}^n(-, G)$ mit einer natürlichen Zahl $n > 0$ und einer Gruppe G ist der darstellende Raum der Eilenberg–MacLane Raum $K(G, n)$. Mit den Lemmata (??) und (XXXX) lässt sich Lemma (XXXX) kurz bestätigen durch:

$$(622) \quad \begin{aligned} H_{\text{sing}}^n(-, G) &\cong [-, K(G, n)] \cong [-, \Omega K(G, n+1)] \\ &\cong [\Sigma-, K(G, n+1)] \cong H_{\text{sing}}^{n+1}(\Sigma-, G). \end{aligned}$$

Für eine natürliche Zahl $n > 0$ und eine Gruppe G sowie einen kontravarianten Funktor $F: ? \rightarrow ?$ ist mit dem Yoneda-Lemma:

$$(623) \quad \text{Nat}(H_{\text{sing}}^n(-, G), F) \cong \text{Nat}([-, K(G, n)], F) \cong F(K(G, n))$$

$$(624) \quad \text{Nat}(H_{\text{sing}}^1(-, \mathbb{Z}), H_{\text{sing}}^n(-, G)) \cong H_{\text{sing}}^n(S^1, G) \cong \begin{cases} G & ; n = 0 \text{ oder } n = 1 \\ 1 & ; n > 1 \end{cases}$$

Für die natürlichen Transformationen zwischen Kohomotopie und singulärer Kohomologie gilt:

$$(625) \quad \text{Nat}(H_{\text{sing}}^n(-, G), \pi^k) \cong \pi^k K(G, n)$$

$$(626) \quad \text{Nat}(\pi^k, H_{\text{sing}}^n(-, G)) \cong H_{\text{sing}}^n(\mathbb{S}^k, G)$$

83. ALEXANDER-DUALITÄT

Alexander-Dualität ist ein Resultat über die Verbindung von reduzierter Homologie- und reduzierter Kohomologie eines reduzierten kompakten und lokal zusammenziehbaren Unterraumes einer Sphäre und dessen Komplementes. Diese lässt sich insbesondere für glatte Mannigfaltigkeiten anwenden, da sich diese nach dem Whitney'schen Einbettungssatz stets in euklidische Räume maximal doppelter Dimension einbetten lassen, deren Alexandroff-Kompaktifizierungen genau die Sphären sind.

Lemma 83.1. *Für $k < n$ und die kanonische Inklusion $S^k \hookrightarrow S^n$ ist:*

$$(627) \quad S^n \setminus S^k \simeq S^{n-k-1}.$$

Beweis. XXXX □

84. SPANIER–WHITEHEAD-DUALITÄT

Spanier–Whitehead-Dualität ist der Spezialfall der Dualität in monoidalen Kategorien im Fall der monoidalen Homotopiekategorie der Spektren. Es ist kurzer auch als *S-Dualität* bekannt, doch kann dann mit der gleichnamigen doch nicht verwandten S-Dualität aus der Stringtheorie verwechselt werden.

Definition 84.1 (Spanier–Whitehead-Dualität). *Für Spektren A und A^* ist ein Spektrermorphismus $f: \mathbb{S} \rightarrow A \wedge A^*$ mit: eine Spanier–Whitehead-Dualität.*

84.1. MILNOR–SPANIER–WHITEHEAD-DUALITÄT

Milnor–Spanier–Whitehead-Dualität ist eine spezielle Spanier–Whitehead-Dualität für glatte Mannigfaltigkeiten. Nach dem Whitney'schen Einbettungssatz lassen sich diese stets in euklidische Räume maximal doppelter Dimension einbetten, was die Definition des stabilen Normalenbündels ermöglicht. Es stellt sich heraus, dass dessen Thom-Spektrum und das Einhängungsspektrum der Mannigfaltigkeit unter der Spanier–Whitehead-Dualität miteinander korrespondieren.

85. POSTNIKOV-TURM

Der *Postnikov-Turm* ist eine Konstruktion für topologische Räume, bei denen schrittweise die Homotopiegruppen von oben entfernt werden.

Definition 85.1 (Postnikov-Turm). *Für einen topologischen Raum X ist eine Faktorisierung der terminalen Abbildung $X \rightarrow \{*\}$ der Form:*

$$(628) \quad X \rightarrow \dots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \simeq \{*\},$$

sodass $\forall n \in \mathbb{N}: g_{n-1} = f_{n-1} \circ g_n$ und:

$$\text{I.) } \pi_i g_n: \pi_i X \xrightarrow{\cong} \pi_i X_n \text{ für alle } i \leq n$$

$$\text{II.) } \pi_i X_n = 1 \text{ für alle } i > n,$$

ein Postnikov-Turm von X .

Für einen CW-Komplex sind die Räume im Postnikov-Turm eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz, für einen beliebigen topologischen Raum sind sie eindeutig bis auf schwache Homotopieäquivalenz. $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ ist eine Faserung mit Faser $K(\pi_n X, n)$. Die Abbildung $X \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist eine schwache Homotopieäquivalenz, was den Postnikov-Turm zu einer Approximation eines topologischen Raumes durch CW-Komplexe oder *CW-Approximation* macht. [?, CrI. 4.68.]

$$(629) \quad \pi_i \text{Hofib}(g_n: X \rightarrow X_n) = \begin{cases} 1 & ; i \leq n \\ \pi_i X & ; i > n \end{cases}$$

$$(630) \quad M \text{SO} = M \text{O}\langle 2 \rangle$$

$$(631) \quad M \text{Spin} = M \text{O}\langle 4 \rangle$$

$$(632) \quad M \text{String} = M \text{O}\langle 8 \rangle$$

86. WHITEHEAD-TURM

Der *Whitehead-Turm* ist eine Konstruktion für topologische Räume, bei denen schrittweise die Homotopiegruppen von unten entfernt werden.

Definition 86.1 (Whitehead-Turm). *Für einen topologischen Raum X ist eine Faktorisierung der initialen Abbildung $\{*\} \rightarrow X$ der Form:*

$$(633) \quad \{*\} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = X,$$

sodass ??? und:

$$\text{I.) } \pi_i X_n = 1 \text{ für alle } i \leq n$$

$$\text{II.) } \pi_i g_n: \pi_i X_n \xrightarrow{\cong} \pi_i X \text{ für alle } i > n$$

ein Whitehead-Turm von X .

$f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ ist eine Faserung mit Faser $K(\pi_n X, n-1)$.

87. RATIONALE HOMOTOPIETHEORIE

Rationale Homotopietheorie untersucht lediglich die Anteile von Homotopiegruppen ohne Torsion, was durch ein Tensorprodukt mit dem rationalen Körper erreicht wird. Als Folge werden die rationalen Homotopiegruppen zu Vektorräumen und können daher besonders einfach untersucht werden. Ein gutes Beispiel ist die rationale Homotopietheorie der Sphären, welche vollständig verstanden ist, obwohl die gewöhnlichen Homotopiegruppen der Sphären schwer zu berechnen sind.

88. RATIONALE HOMOLOGIETHEORIE

Rationale Homologietheorie untersucht lediglich die Anteile von Homologiegruppen ohne Torsion, was durch Koeffizienten im rationalen Körper erreicht wird oder nach der Homologische Fassung des universellen Koeffiziententheorems alternativ durch ein Tensorprodukt mit diesem. Als Folge werden die rationalen Homotopiegruppen zu Vektorräumen und können daher besonders einfach untersucht werden.

89. RATIONALE ÄQUIVALENZEN

In der gewöhnlichen Homotopie-, Homologietheorie und Kohomologietheorie sind schwache Homotopieäquivalenzen von fundamentaler Bedeutung, da diese Isomorphismen zwischen allen drei Invarianten induzieren und weiterhin diese drei Bedingungen sogar äquivalent zueinander sind. Beim Übergang auf die rationalen Theorien werden alle drei Bedingungen abgeschwächt, also ist es keine triviale Folge, dass Äquivalenzen immer noch gelten.

90. HOMOTOPIE- UND HOMOLOGIESPHÄREN

Definition 90.1 (Homotopiesphäre). *Eine n -Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zur n -Sphäre ist, wird n -Homotopiesphäre genannt.*

Definition 90.2 (Homologiesphäre). *Eine n -Mannigfaltigkeit, welche die gleichen integralen Homologiegruppen wie die n -Sphäre hat, wird n -Homologiesphäre genannt.*

Definition 90.3 (Rationale Homologiesphäre). *Eine n -Mannigfaltigkeit, welche die gleichen rationalen Homologiegruppen wie die n -Sphäre hat, wird rationale n -Homologiesphäre genannt.*

Korollar 90.4. *Jede Homotopiesphäre ist eine Homologiesphäre.*

Satz 90.5. *Jede einfach zusammenhängende Homologiesphäre ist eine Homotopiesphäre.*

Beweis. Sei Σ eine einfach zusammenhängende n -Homologiesphäre. Durch $(n-1)$ -fache Anwendung des integralen Hurewicz-Theorems (??) folgt, dass Σ sogar $(n-1)$ -zusammenhängend mit $\pi_n(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ ist: Ist Σ k -zusammenhängend mit $1 \leq k < n$, dann ist $\pi_{k+1}(\Sigma) \cong H_{k+1}(\Sigma)$ nach dem integralen Hurewicz-Theorem (??). Ist $k+1 < n$, dann ist M sogar $(k+1)$ -zusammenhängend und das Argument kann einen Grad höher wiederholt werden. Ist $k+1 = n$, dann ist $\pi_n(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$.

Eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow \Sigma$, dessen Homotopieklasse $[f] \in \pi_n(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ ein Generator ist, induziert Isomorphismen auf allen Homologiegruppen (Nachweis?) und ist daher nach Lemma (??) eine schwache Homotopieäquivalenz. Nach dem Satz von Whitehead (??) (Σ muss CW-Komplex sein?) ist f eine Homotopieäquivalenz. \square

Beispiel 90.6. *Die fünfdimensionale Wu-Mannigfaltigkeit $W = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$ ist einfach zusammenhängend und eine rationale 5-Homologiesphäre (mit den nichttrivialen Homologiegruppen $H_0(W) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(W) \cong \mathbb{Z}_2$ und $H_5(W) \cong \mathbb{Z}$), aber keine 5-Homotopiesphäre.*

Lemma 90.7. *Es gibt genau dann einfach zusammenhängende n -Homologiesphären, die nicht homöomorph zur n -Sphäre sind, wenn $n \geq 5$. MO/214727, [?, Ex. 7], [?]*

$$(643) \quad H_0(\Sigma) \cong H^5(\Sigma) = \mathbb{Z}$$

$$(644) \quad H_1(\Sigma) \cong H^4(\Sigma) = \pi_1(M)^{\text{ab}}$$

$$(645) \quad H_2(\Sigma) \cong H^3(\Sigma) \cong \text{????}$$

$$(646) \quad H_3(\Sigma) \cong H^2(\Sigma) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\pi_1(\Sigma), \mathbb{Z})$$

$$(647) \quad H_4(\Sigma) \cong H^1(\Sigma) \cong \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathbb{Z})$$

$$(648) \quad H_5(\Sigma) \cong H^0(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$$

90.1. HOMOTOPIESPHÄREN

Definition 90.12 (Homotopiesphäre). XXXX

Satz 90.13. *Eine wegzusammenhängende, n -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n$ -Mannigfaltigkeit ist eine $2n$ -Homotopiesphäre.*

Beweis. Sei Σ eine wegzusammenhängende, n -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n$ -Mannigfaltigkeit. Da Σ wegzusammenhängend ist, ist $H_0(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz (??). Da Σ triviale Fundamentalgruppe hat, ist $H_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma)^{\text{ab}} \cong 1$ nach Satz (??). Da Σ n -zusammenhängend ist, gilt $H_k(\Sigma) \cong 1$ für alle $2 \leq k \leq n$ nach dem integralen Hurewicz-Theorem (??). Für $n+1 \leq k \leq 2n-1$ folgt mit der Poincaré-Dualität, da Σ orientierbar und geschlossen ist, nach Theorem (??) und Lemma (XXXX):

$$(649) \quad H_k(\Sigma) \cong H^{2n-k}(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_{2n-k}(\Sigma), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(1, \mathbb{Z}) \cong 1;$$

$$(650) \quad H_{2n}(\Sigma) \cong H^0(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_0(\Sigma), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Σ ist daher eine (integrale) $2n$ -Homologiesphäre. Mit Satz (??) folgt die Behauptung. \square

Der nächst allgemeinere Fall ist eine wegzusammenhängende, $n-1$ -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n$ -Mannigfaltigkeit. Für diese sind alle (integralen) Homologiegruppen bis auf $H_n(\Sigma)$ wie die der $2n$ -Sphäre. Für diese gilt mit der Poincaré-Dualität nach Theorem (??) und Lemma (XXXX):

$$(651) \quad H_n(\Sigma) \cong H^n(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_n(\Sigma), \mathbb{Z}).$$

Satz 90.14. *Eine wegzusammenhängende, n -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n+1$ -Mannigfaltigkeit ist eine $2n+1$ -Homotopiesphäre.*

Beweis. Sei Σ eine wegzusammenhängende, n -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n+1$ -Mannigfaltigkeit. Da Σ wegzusammenhängend ist, ist $H_0(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz (??). Da Σ triviale Fundamentalgruppe hat, ist $H_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma)^{\text{ab}} \cong 1$ nach Satz (??). Da Σ n -zusammenhängend ist, gilt $H_k(\Sigma) \cong 1$ für alle $2 \leq k \leq n$ nach dem integralen Hurewicz-Theorem (??). Für $n+1 \leq k \leq 2n$ folgt mit der Poincaré-Dualität nach Theorem (??), da Σ orientierbar und geschlossen ist, und Lemma (XXXX):

$$(652) \quad H_k(\Sigma) \cong H^{2n+1-k}(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_{2n+1-k}(\Sigma), \mathbb{Z})$$

$$(653) \quad H_{2n+1}(\Sigma) \cong H^0(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_0(\Sigma), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Σ ist daher eine (integrale) $2n+1$ -Homologiesphäre. Mit Satz (??) folgt die Behauptung. \square

Der nächst allgemeinere Fall ist eine wegzusammenhängende, $n-1$ -zusammenhängende, orientierbare und geschlossene $2n+1$ -Mannigfaltigkeit. Für diese sind alle (integralen) Homologiegruppen bis auf $H_n(\Sigma)$ und $H_{n+1}(\Sigma)$ wie die der $2n+1$ -Sphäre. Für diese gilt mit der Poincaré-Dualität nach Theorem (??) und Lemma (XXXX):

$$(654) \quad H_n(\Sigma) \cong H^{n+1}(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_{n+1}(\Sigma), \mathbb{Z});$$

$$(655) \quad H_{n+1}(\Sigma) \cong H^n(\Sigma) \cong \text{Hom}(H_n(\Sigma), \mathbb{Z}).$$

90.2. HOMOLOGIESPHÄREN

Definition 90.15 (Homologiesphäre). *Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit Σ mit den gleichen (integralen) Homologiegruppen wie die n -dimensionale Sphäre:*

$$(656) \quad H_k(\Sigma, \mathbb{Q}) = H_k(S^n, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ; k = 0 \text{ oder } k = n \\ 1 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine (integralen) Homologiesphäre.

XXXX

Korollar 90.16. *Jede n -Homotopiesphäre ist eine n -Homologiesphäre.*

XXXX

Satz 90.17. *Jede einfach zusammenhängende n -Homologiesphäre ist eine n -Homotopiesphäre.*

Beweis. XXXX

□

90.3. RATIONALE HOMOTOPIESPHÄREN

Definition 90.18 (Rationale Homotopiesphäre). *Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit Σ mit den gleichen rationalen Homotopiegruppen wie die n -dimensionale Sphäre:*

$$(657) \quad \pi_n(\Sigma) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_k(S^n) \otimes \mathbb{Q} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ; k = n \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & ; k = n, 2n - 1 \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine rationale n -Homotopiesphäre.

Korollar 90.19. *Jede n -Homotopiesphäre ist eine rationale n -Homotopiesphäre.*

90.4. RATIONALE HOMOLOGIESPHÄREN

Definition 90.20 (Rationale Homologiesphäre). *Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit Σ mit den gleichen rationalen Homologiegruppen wie die n -dimensionale Sphäre:*

$$(658) \quad H_k(\Sigma, \mathbb{Q}) = H_k(S^n, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ; k = 0 \text{ oder } k = n \\ 1 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine rationale n -Homologiesphäre.

Korollar 90.21. *Jede n -Homologiesphäre ist eine rationale n -Homologiesphäre.*

91. BOCKSTEIN-HOMOMORPHISMEN

91.1. SPEZIELLE BOCKSTEIN-HOMOMORPHISMEN

Die kurze exakte Sequenz $1 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 1$ ergibt Bockstein-Homomorphismen $\beta_k: H_k(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(X; \mathbb{Z})$ und $\beta^k: H^k(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+1}(X; \mathbb{Z})$. Für $n = 2$ werden diese für die Definition der integralen Steenrod-Operationen oder die Definition der integralen Stiefel–Whitney-Klassen verwendet.

Die kurze exakte Sequenz $1 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 1$ ergibt Bockstein-Homomorphismen $\beta_i: H_k(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $\beta^i: H^k(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+1}(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Für $n = 2$ hängen diese mit den Steenrod-Operationen zusammen.

92. STEENROD-OPERATIONEN

92.1. INTEGRALE STEENROD-OPERATION

93. WU-KLASSEN

TEIL 6. KOHOMOLOGIE THEORIE

94. SINGULÄRE KOHOMOLOGIE

Lemma 94.1. *Für ein Raumpaar (X, A) und einen Körper \mathbb{K} ist:*

$$(659) \quad H_{\text{sing}}^n(X, A; \mathbb{K}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{K}), \mathbb{K}) = H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{K})^*$$

Beweis. XXXX □

Dieses Lemma lässt sich verallgemeinern zu:

Lemma 94.2. *Für ein Raumpaar (X, A) , einen Ring R und ein R -Modul M ist:*

$$(660) \quad H_{\text{sing}}^n(X, A; M) \cong \text{Hom}_R(H_n^{\text{sing}}(X, A; R), M)$$

Beweis. XXXX □

95. AXIOMATISCHE KOHOMOLOGIE

Die axiomatische Kohomologie ist eine Abstraktion der grundlegenden Eigenschaften der singulären Kohomologie und der Untersuchung der daraus folgenden Eigenschaften.

Lemma 95.1. *Für einen Ring R ist:*

$$(661) \quad H^*(\mathbb{R}P^\infty, R) \cong \text{?}$$

$$(662) \quad H^*(\mathbb{R}P^n, R) \cong \text{?}$$

Beweis. XXXX □

Lemma 95.2. *Für einen Ring R ist:*

$$(663) \quad H^*(\mathbb{C}P^\infty, R) \cong R[X]$$

$$(664) \quad H^*(\mathbb{C}P^n, R) \cong R[X]/(X^{n+1})$$

Beweis. XXXX □

Lemma 95.3. *Es gibt keine stetige Retraktion $\mathbb{R}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ für $n > 0$.*

Beweis. (Mit Homotopie.) Gäbe es eine solche Retraktion, dann ergäbe sich durch Anwendung der n -ten Homotopie π_n auf die Sequenz $\text{id}_{\mathbb{R}P^n}: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ mit $\pi_n(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ nach XXXX und $\pi_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \cong \pi_n(S^{n+1}) \cong 1$ nach XXXX sowie den Funktoreigenschaften von π_n nach Korollar (??) eine induzierte Sequenz:

$$(665) \quad \text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{Z},$$

die jedoch nicht existieren kann. □

Beweis. (Mit Homologie, wenn n ungerade.) Gäbe es eine solche Retraktion, dann ergäbe sich durch Anwendung der n -ten Homologie H_n auf die Sequenz $\text{id}_{\mathbb{R}P^n}: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ mit $H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$ nach Gleichung (??) und $H_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \cong 1$ nach Gleichung (??) sowie den Funktoreigenschaften von H_n nach Korollar (??) eine induzierte Sequenz:

$$(666) \quad \text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{Z},$$

die jedoch nicht existieren kann. □

Lemma 95.4. *Es gibt keine stetige Retraktion $\mathbb{C}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ für $n > 0$.*

Beweis. (Mit Homotopie.) Gäbe es eine solche Retraktion, dann ergäbe sich durch Anwendung der $(2n + 1)$ -ten Homotopie π_{2n+1} auf die Sequenz $\text{id}_{\mathbb{C}P^n}: \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ mit $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ nach Gleichung (XXXX) und $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \cong 1$ nach Gleichung (XXXX) sowie den Funktoreigenschaften von π_{2n+1} nach Korollar (??) eine induzierte Sequenz:

$$(667) \quad \text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow 1 \rightarrow \mathbb{Z},$$

die jedoch nicht existieren kann. □

Ein analoger Beweis mithilfe von Homologie ist nicht möglich, da sich die Homologien von $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{C}P^{n+1}$ nach XXXX nur im Grad $2(n + 1)$ mit $H_{2(n+1)}(\mathbb{C}P^n) \cong 1$ und $H_{2(n+1)}(\mathbb{C}P^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$ unterscheiden, wobei die induzierte Sequenz $\text{id}_1: 1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ keinen Widerspruch erzeugt.

Lemma 95.5. *Eine natürliche Transformation $\eta: H^* \Rightarrow K^*$ von Kohomologietheorien, für die $H^*(\{*\}) \rightarrow K^*(\{*\})$ ein Isomorphismus ist, ist ein Isomorphismus auf allen CW-Komplexen.*

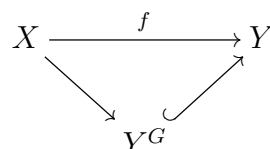
Beweis. XXXX □

TEIL 7. TOPOLOGISCHE GRUPPEN UND TOPOLOGISCHE RÄUME MIT STETIGER GRUPPENWIRKUNG

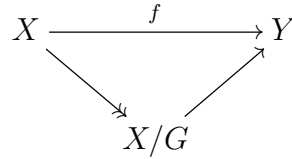
96. TOPOLOGISCHE RÄUME MIT STETIGER GRUPPENWIRKUNG

Beispiel 96.1. *Sei G eine topologische Gruppe und $f: X \rightarrow Y$ eine G -equivariante stetige Abbildung zwischen G -Räumen X und Y .*

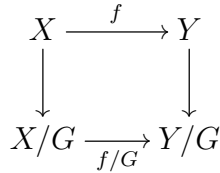
- *Ist die Gruppenwirkung auf X trivial, dann gilt $f(x) = f(g \triangleright x) = g \triangleright f(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$, also faktorisiert f über Y^G :*



- Ist die Gruppenwirkung auf Y trivial, dann gilt $f(g \triangleright x) = g \triangleright f(x) = f(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$, also schränkt f sich auf eine wohldefinierte stetige Abbildung $X/G \rightarrow Y, [x] \mapsto f(x)$:



Lemma 96.2. Für eine kompakte topologische Gruppe G und eine G -equivariante stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen hausdorffschen G -Räumen X und Y ist das Diagramm:



genau dann kommutativ, wenn f alle Isotropiegruppen erhält.

Beweis. XXXX □

96.1. INDUZIERTER GRUPPENWIRKUNG DURCH ABBILDUNGEN

Lemma 96.3. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ zwischen topologischen Gruppen G und H macht H zu einem G -Linksraum durch die Komposition:

$$(668) \quad \triangleleft: G \times H \rightarrow H, h \triangleleft g := \varphi(g) \circ h$$

und zu einem G -Rechtsraum durch:

$$(669) \quad \triangleright: G \times H \rightarrow H, g \triangleright h := h \circ \varphi(g)$$

Beweis. XXXX

$$(670) \quad h \triangleleft (g \circ g') = \varphi(g \circ g') \circ h = \varphi(g) \circ \varphi(g') \circ h = (\varphi(g') \circ h) \triangleleft g = (h \triangleleft g') \triangleleft g$$

□

96.2. INDUZIERTER GRUPPENWIRKUNG AUF ABBILDUNGSRÄUMEN

Lemma 96.4. Für eine topologische Gruppe G , einen G -Linksraum (bzw. G -Rechtsraum) X sowie einen topologischen Raum Y ist $C_{\text{co}}(X, Y)$ ein G -Rechtsraum (bzw. G -Linksraum) durch:

$$(671) \quad G \times C_{\text{co}}(X, Y) \rightarrow C_{\text{co}}(X, Y), (f \triangleleft g)(x) := f(g \triangleright x)$$

$$(672) \quad (\text{bzw. } (g \triangleright f)(x) := f(x \triangleleft g)).$$

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $f \triangleleft e = f$, da $e \triangleright x = x$ für alle $x \in X$. Für Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$(673) \quad (f \triangleleft (g \circ h))(x) = f((g \circ h) \triangleright x) = f(g \triangleright (h \triangleright x)) = (f \triangleleft g)(h \triangleright x) = ((f \triangleleft g) \triangleleft h)(x)$$

für alle $x \in X$, womit $f \triangleleft (g \circ h) = (f \triangleleft g) \triangleleft h$. □

Lemma 96.5. Für eine topologische Gruppe G , einen topologischen Raum X sowie einen G -Linksraum (bzw. G -Rechtsraum) Y ist $C_{\text{co}}(X, Y)$ ein G -Linksraum (bzw. G -Rechtsraum) durch:

$$(674) \quad G \times C_{\text{co}}(X, Y) \rightarrow C_{\text{co}}(X, Y), (g \triangleright f)(x) := g \triangleright f(x)$$

$$(675) \quad (\text{bzw. } (f \triangleleft g)(x) := f(x \triangleleft g)).$$

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Für das neutrale Element $e \in G$ gilt $e \triangleright f = f$, da $e \triangleright y = y$ für alle $y \in Y$. Für Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$(676) \quad ((g \circ h) \triangleleft f)(x) = (g \circ h) \triangleleft f(x) = g \triangleleft (h \triangleleft f(x)) = g \triangleleft ((h \triangleleft f)(x)) = (g \triangleleft (h \triangleleft f))(x)$$

für alle $x \in X$, womit $(g \circ h) \triangleleft f = g \triangleleft (h \triangleleft f)$. □

97. KATEGORIE DER TOPOLOGISCHEN RÄUME MIT GRUPPENWIRKUNG

Lemma 97.1.

$$(677) \quad \mathbf{LAct}_G \mathbf{Top} \cong \mathbf{RAct}_G \mathbf{Top} \simeq \mathbf{Fct}(\mathbf{BG}, \mathbf{Top})$$

Beweis. XXXX □

Für einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ zwischen topologischen Gruppen G und H lässt sich untersuchen, welche Funktoren dieser zwischen den jeweiligen Kategorien \mathbf{Top}_G der G -Räume und \mathbf{Top}_H der H -Räume erzeugt und ob Adjunktionen zwischen diesen bestehen.

Für einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen topologischen Gruppen G und H ergeben sich zwei durch

- H ist ein G -Linksraum durch die Gruppenwirkung:

$$(678) \quad G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto \phi(g)h.$$

- H ist ein G -Rechtsraum durch die Gruppenwirkung:

$$(679) \quad G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto h\phi(g).$$

Für einen H -Raum X ergibt sich eine stetigen Gruppenwirkung von G auf X durch die Komposition:

$$(680) \quad G \times X \xrightarrow{\varphi \times \text{id}_X} H \times X \rightarrow X.$$

- Sei X ein H -Linksraum. Durch die Komposition $G \times X \xrightarrow{\varphi \times \text{id}_X} H \times X \rightarrow X$ wird X zu einem G -Linksraum. Daraus ergibt sich ein Funktor $\varphi^*: \mathbf{LAct}_H \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{LAct}_G \mathbf{Top}$.
- Sei X ein H -Rechtsraum. Durch die Komposition $G \times X \xrightarrow{\varphi \times \text{id}_X} H \times X \rightarrow X$ wird X zu einem G -Rechtsraum. Daraus ergibt sich ein Funktor $\varphi^*: \mathbf{RAct}_H \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{RAct}_G \mathbf{Top}$.
- Sei X ein G -Linksraum. Mit H als (H, G) -Raum ist $H \times_G X$ ein H -Linksraum. Daraus ergibt sich ein Funktor $H \times_G -: \mathbf{LAct}_G \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{LAct}_H \mathbf{Top}$.
- Sei X ein G -Rechtsraum. Mit H als (G, H) -Raum ist $X \times_G H$ ein H -Rechtsraum. Daraus ergibt sich ein Funktor $- \times_G H: \mathbf{RAct}_G \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{RAct}_H \mathbf{Top}$.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{H \times_G -} & \\ \mathbf{LAct}_G \mathbf{Top} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\perp} \\ \xrightarrow{\varphi_*} \\ \xleftarrow{\perp} \end{array} & \mathbf{LAct}_H \mathbf{Top} \\ & \xrightarrow{C_{\text{co}}(H, -)^G} & \\ & \xrightarrow{- \times_G H} & \\ \mathbf{RAct}_G \mathbf{Top} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\perp} \\ \xrightarrow{\varphi_*} \\ \xleftarrow{\perp} \end{array} & \mathbf{RAct}_H \mathbf{Top} \\ & \xrightarrow{C_{\text{co}}(H, -)^G} & \end{array}$$

Definition 97.2. Für eine über sich selbst angereicherte Kategorie \mathcal{C} und ein Gruppenobjekt G darin ist:

$$(681) \quad \mathbf{Act}_G \mathcal{C} := \mathbf{Fct}_{\mathcal{C}}(\mathbf{BG}, \mathcal{C})$$

die Kategorie der G -Wirkungen auf \mathcal{C} .

Lemma 97.3. *Für eine topologische Gruppe G gibt es eine Adjunktion:*

$$\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}) \begin{array}{c} \xrightarrow{-/G} \\ \perp \\ \xleftarrow{\text{Triv}} \end{array} \mathbf{Top}$$

Beweis. Die Einheit der Adjunktion ist für einen G -Raum X gegeben durch $\eta_X: X \rightarrow \text{Triv}(X/G), x \mapsto [x]$. Die Koeinheit der Adjunktion ist für einen topologischen Raum Y gegeben durch $\varepsilon_Y: \text{Triv}(Y)/G \rightarrow Y, [y] \mapsto y$, wobei die Äquivalenzklassen aufgrund der trivialen Gruppenwirkungen trivial sind und die Koeinheit dadurch ein natürlicher Isomorphismus, was der durch Beispiel (XXXX) gegebenen Volltreueheit des rechtsadjungierten Funktors Triv entspricht. XXXX \square

Lemma 97.4. *Für eine topologische Gruppe G gibt es eine Quillen-Adjunktion:*

$$\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{proj}} \begin{array}{c} \xrightarrow{-/G} \\ \perp \\ \xleftarrow{\text{Triv}} \end{array} \mathbf{Top}_{\text{Qu}}$$

Beweis. XXXX \square

Lemma 97.5. *Für eine simpliziale Gruppe G gibt es eine Adjunktion:*

$$\mathbf{Act}_G(\mathbf{sSet}) \begin{array}{c} \xleftarrow{-\times_{\overline{W}G}WG} \\ \perp \\ \xrightarrow{(-\times WG)/G} \end{array} \mathbf{sSet}_{/\overline{W}G}$$

Beweis. XXXX \square

Lemma 97.6. *Für eine simpliziale Gruppe G gibt es eine Quillen-Äquivalenz:*

$$\mathbf{Act}_G(\mathbf{sSet}_{\text{Qu}})_{\text{proj}} \begin{array}{c} \xleftarrow{-\times_{\overline{W}G}WG} \\ \perp \\ \xrightarrow{(-\times WG)/G} \end{array} (\mathbf{sSet}_{\text{Qu}})_{/\overline{W}G}$$

Beweis. XXXX \square

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G (von links) auf einem topologischen Raum X entspricht einem Funktor $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Top}, * \mapsto X, g \mapsto \triangleright_g$. Die beiden Eigenschaften eines Funktors entsprechen dabei genau den beiden Bedingungen einer Gruppenwirkung:

- Für $e \in G$, welches dem Identitätsmorphismus id_* in \mathbf{BG} entspricht, ist $\triangleright_e = \text{id}_X$, also $e \triangleright x = \triangleright_e(x) = \text{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.
- Für Gruppenelemente $g, h \in G$, welche Morphismen in \mathbf{BG} entsprechen, ist $\triangleright_{gh} = \triangleright_g \circ \triangleright_h$, also $(g \circ h) \triangleright x = \triangleright_{gh}(x) = (\triangleright_g \circ \triangleright_h)(x) = g \triangleright (h \triangleright x)$ für alle $x \in X$.

Die zusätzliche Berücksichtigung der Stetigkeit der Gruppenwirkung bei der Verwendung einer topologischen Gruppe G ergibt sich durch die Beobachtung, dass dann \mathbf{BG} eine **Top**-angereicherte Kategorie ist. Eine stetige Gruppenwirkung einer topologischen Gruppe G (von links) auf einem topologischen Raum X entspricht dann einem **Top**-angereicherten Funktor $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Top}, * \mapsto X, g \mapsto \triangleleft_g$.

Für G -Räume X und Y , welche **Top**-angereicherten Funktoren $\tilde{X}: \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Top}, * \mapsto X, g \mapsto \triangleright_g$ und $\tilde{Y}: \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Top}, * \mapsto Y, g \mapsto \triangleright_g$ entsprechen, entspricht eine **Top**-angereicherte natürliche Transformation $\eta: \tilde{X} \Rightarrow \tilde{Y}$ genau einer stetigen Abbildung $\eta_*: \tilde{X}(\ast) =$

$X \rightarrow \tilde{Y}(\ast) = Y$, für welche das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}(\ast) = X & \xrightarrow{\eta_\ast} & \tilde{Y}(\ast) = Y \\ \tilde{X}(g) \rightrightarrows_g \downarrow & & \downarrow \tilde{Y}(g) \rightrightarrows_g \\ \tilde{X}(\ast) = X & \xrightarrow{\eta_\ast} & \tilde{Y}(\ast) = Y \end{array}$$

für jedes $g \in G$ kommutiert, also einer G -equivarianten stetigen Abbildung.

Korollar 97.7. Für eine topologische Gruppe G gibt es eine Isomorphie von Kategorien:

$$(682) \quad \mathbf{LAct}_G \mathbf{Top} \cong \mathbf{Fct}_{\mathbf{Top}}(\mathbf{BG}, \mathbf{Top}).$$

98. BALANCIERTES PRODUKT

Lemma 98.1. Für einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen topologischen Gruppen G und H und einen G -Linksraum X gilt:

- I.) ϕ ist genau dann injektiv, wenn $X \rightarrow H \times_G X, x \mapsto [(1, x)]$ injektiv ist. Dabei erfordert die Rückrichtung zusätzlich, dass G frei auf X wirkt.
- II.) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn $X \rightarrow H \times_G X, x \mapsto [(1, x)]$ surjektiv ist.

Beweis. I.): \Rightarrow : Seien $x, x' \in X$ mit $[(1, x)] = [(1, x')]$, dann gibt es ein $g \in \ker(\phi)$ mit $x = gx'$. Da ϕ injektiv ist, ist $\ker(\phi) = \{1\}$ und $x = x'$. \Leftarrow : Ist ϕ nicht injektiv, dann gibt es $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$ und $\phi(g) = \phi(g')$. Für ein $x \in X$ gilt $gx \neq g'x$, da G frei auf X wirkt, aber:

$$(683) \quad \begin{aligned} [(xg, 1)] &= [(xg, \phi(g)\phi(g)^{-1})] = [(x, \phi(g)^{-1})] \\ &= [(x, \phi(g')^{-1})] = [(xg', \phi(g')\phi(g')^{-1})] = [(xg', 1)]. \end{aligned}$$

II.): \Rightarrow : Sei $[(h, x)] \in H \times_G X$. Da ϕ surjektiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = h$ und daher ist $[(h, x)] = [1, gx]$. \Leftarrow : Seien $h \in H$ und $x \in X$, dann ist $[(h, x)] \in H \times_G X$. Da $X \rightarrow H \times_G X, x \mapsto [(1, x)]$ surjektiv ist, gibt es ein $x' \in X$ mit $[(1, x')] = [(h, x)]$. Also gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = h$ und $x = gx'$. \square

Lemma 98.2. Für einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen topologischen Gruppen G und H und einen G -Rechtsraum X gilt:

- I.) ϕ ist genau dann injektiv, wenn $X \rightarrow X \times_G H, x \mapsto [(x, 1)]$ injektiv ist. Dabei erfordert die Rückrichtung zusätzlich, dass G frei auf X wirkt.
- II.) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn $X \rightarrow X \times_G H, x \mapsto [(x, 1)]$ surjektiv ist.

Beweis. I.): Seien $x, x' \in X$ mit $[(x, 1)] = [(x', 1)]$, dann gibt es ein $g \in \ker(\phi)$ mit $x = x'g$. Da ϕ injektiv ist, ist $\ker(\phi) = \{1\}$ und $x = x'$. \Leftarrow : Ist ϕ nicht injektiv, dann gibt es $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$ und $\phi(g) = \phi(g')$. Für ein $x \in X$ gilt $xg \neq xg'$, da G frei auf X wirkt, aber:

$$(684) \quad \begin{aligned} [(1, gx)] &= [(\phi(g)^{-1}\phi(g), gx)] = [(\phi(g)^{-1}, x)] \\ &= [(\phi(g')^{-1}, x)] = [(\phi(g')^{-1}\phi(g'), g'x)] = [(1, g'x)]. \end{aligned}$$

II.): \Rightarrow : Sei $[(x, h)] \in X \times_G H$. Da ϕ surjektiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = h$ und daher ist $[(x, h)] = [xg, 1]$. \Leftarrow : Seien $h \in H$ und $x \in X$, dann ist $[(x, h)] \in X \times_G H$. Da $X \rightarrow X \times_G H, x \mapsto [(x, 1)]$ surjektiv ist, gibt es ein $x' \in X$ mit $[(x', 1)] = [(x, h)]$. Also gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = h$ und $x = x'g$. \square

99. BALANCIERTES SMASH-PRODUKT

TEIL 8. EQUIVARIANTE ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

100. BOREL-KONSTRUKTION

Definition 100.1 (Borel-Konstruktion). *Für eine topologische Gruppe G und einen G -Raum X ist das balancierte Produkt $X \times_G \mathcal{E}G$ dessen Borel-Konstruktion.*

Lemma 100.2. *Für eine zusammenhängende topologische Gruppe G und einen zusammenhängenden G -Raum X , sodass die kanonische Projektion $X \rightarrow X/G$ ein Hauptfaserbündel ist, ist die kanonische Projektion $X \times_G \mathcal{E}G \rightarrow X/G$ eine schwache Homotopieäquivalenz.*

Beweis. XXXX □

101. EQUIVARIANTE DE-RHAM-KOHOMOLOGIE

101.1. WEIL-MODELL

XXXX

101.2. CARTAN-MODELL

XXXX

101.3. KALKMAN-MODELL

XXXX

102. EQUIVARIANTE HOMOTOPIETHEORIE

Equivariante Homotopietheorie ist eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Homotopietheorie für topologische Räume mit einer Gruppenwirkung, sodass diese sich für den Spezialfall der trivialen Gruppenwirkung (also der trivialen Gruppe) wieder ergibt. Analog zur gewöhnlichen Homotopietheorie gibt es ebenfalls eine equivariante rationale Homotopietheorie und eine equivariante stabile Homotopietheorie.

103. EQUIVARIANTE KOHOMOLOGIE

Equivariante Kohomologie ist eine Verallgemeinerung der singulären Kohomologie für topologische Räume mit einer Gruppenwirkung, sodass diese sich im Spezialfall der trivialen Gruppenwirkung (also der trivialen Gruppe) wieder ergibt.

104. EQUIVARIANTES WHITEHEAD-THEOREM

Das equivariante Whitehead-Theorem verallgemeinert das Whitehead-Theorem aus der (stabilen) Homotopietheorie auf die equivariante (stabile) Homotopietheorie.

Definition 104.1 ((Schwache) G -Homotopieäquivalenz). *Für eine topologische Gruppe G und G -Räume X und Y wird eine G -equivariante stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die für jede abgeschlossene Untergruppe $H < G$ die Abbildung $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ eine (schwache) Homotopieäquivalenz ist eine (schwache) G -Homotopieäquivalenz.*

Korollar 104.2. *Für eine topologische Gruppe G ist jede G -Homotopieäquivalenz eine schwache G -Homotopieäquivalenz.*

Lemma 104.3. *Für eine topologische Gruppe G ist die Komposition von (schwachen) G -Homotopieäquivalenzen eine (schwache) G -Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ (schwache) G -Homotopieäquivalenzen zwischen G -Räumen X, Y und Z . Sei $H < G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann ist $(g \circ f)^H = g^H \circ f^H: X^H \rightarrow Z^H$ als Komposition von (schwachen) Homotopieäquivalenzen eine (schwache) Homotopieäquivalenz. \square

Lemma 104.4. *Für eine hausdorffsche topologische Gruppe G ist jede (schwache) G -Homotopieäquivalenz eine (schwache) Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine (schwache) G -Homotopieäquivalenz zwischen G -Räumen X und Y . Da G hausdorffsch ist, ist $\{1\} \hookrightarrow G$ abgeschlossen. Da f eine (schwache) G -Homotopieäquivalenz ist, ist $f^{\{1\}}: X^{\{1\}} \rightarrow Y^{\{1\}}$ (also $f: X \rightarrow Y$) eine (schwache) Homotopieäquivalenz. \square

Für eine topologische Gruppe G ist die Kategorie \mathbf{Top}_G auf vier verschiedene Möglichkeiten eine Kategorie mit schwachen Äquivalenzen, nämlich mit den (schwachen) Homotopieäquivalenzen whe und he sowie den (schwachen) G -Homotopieäquivalenzen whe_G und he_G mit:

$$\begin{array}{ccc} \text{he} & \xrightarrow{\quad} & \text{whe} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{he}_G & \xrightarrow{\quad} & \text{whe}_G \end{array}$$

Daraus ergeben sich vier verschiedene Homotopiekategorien mit:

Theorem 104.5 (Equivariantes Whitehead-Theorem). *Für eine topologische Gruppe G ist eine schwache G -Homotopieäquivalenz zwischen G -CW-Komplexen bereits eine G -Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine schwache G -Homotopieäquivalenz zwischen G -CW-Komplexen X und Y . Sei $H < G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann ist $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ eine schwache Homotopieäquivalenz. XXXX \square

105. EQUIVARIANTE FASERUNGEN

Definition 105.1 (Equivariante Faserungen). *Für eine topologische Gruppe G wird eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen G -Räumen X und Y , für die für jede abgeschlossene Untergruppe $H < G$ die induzierte stetige Abbildung $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ eine:*

- I.) *Hurewicz-Faserung ist, eine G -Hurewicz-Faserung genannt.*
- II.) *Serre-Faserung ist, eine G -Serre-Faserung genannt.*
- III.) *Dold-Faserung ist, eine G -Dold-Faserung genannt.*

Lemma 105.2. *Für eine topologische Gruppe G ist die Komposition von:*

- I.) *G -Hurewicz-Faserungen eine G -Hurewicz-Faserung.*
- II.) *G -Serre-Faserungen eine G -Serre-Faserung.*
- III.) *G -Dold-Faserungen eine G -Dold-Faserung.*

Beweis. I.): Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ jeweils G -Hurewicz-Faserungen zwischen G -Räumen X, Y und Z . Sei $H < G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann ist $(g \circ f)^H = g^H \circ f^H: X^H \rightarrow Z^H$ als Komposition von Hurewicz-Faserungen eine Hurewicz-Faserung. II.), III.): Analog. \square

Lemma 105.3. *Für eine hausdorffsche topologische Gruppe G ist jede:*

- I.) *G -Hurewicz-Faserung eine Hurewicz-Faserung.*
- II.) *G -Serre-Faserung eine Serre-Faserung.*
- III.) *G -Dold-Faserung eine Dold-Faserung.*

Beweis. I.): Sei $f: X \rightarrow Y$ eine G -Hurewicz-Faserung zwischen G -Räumen X und Y . Da G hausdorffsch ist, ist $\{1\} \hookrightarrow G$ abgeschlossen. Da f eine G -Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{\{1\}}: X^{\{1\}} \rightarrow Y^{\{1\}}$ (also $f: X \rightarrow Y$) eine Hurewicz-Faserung. II.), III.): Analog. \square

106. MODELLSTRUKTUREN AUF $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$

Auf der Kategorie \mathbf{Top} gibt es zwei häufig verwendete Modellstrukturen: Zum einen die Quillen-Modellstruktur, mit welcher die Kategorie als \mathbf{Top}_{Qu} notiert wird, und zum anderen die Strom-Modellstruktur, mit welcher die Kategorie als \mathbf{Top}_{St} notiert wird. Beide können verwendet werden, um für eine topologische Gruppe G die Kategorie \mathbf{Top}_G der G -Räume mit einer Modellstruktur auszustatten. Dabei lässt sich untersuchen, mit welchen Modellstrukturen die Adjunktionen aus XXXX sogar zu Quillen-Adjunktionen werden.

Es gibt einen kanonischen Vergissfunktoren $U: \mathbf{Top}_G \rightarrow \mathbf{Top}$, welcher die stetige Gruppenwirkung vergisst, einen Funktoren $\text{Triv}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_G$, welcher die triviale Gruppenordnung zuordnet, und den Orbitfunktoren $-/G: \mathbf{Top}_G \rightarrow \mathbf{Top}$.

Die Betrachtung einer injektiven oder projektiven Modellstruktur auf der \mathbf{Top} -angereicherten Kategorie $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$ der G -Räume für eine topologische Gruppe G mithilfe von Lemma (XXXX) wird dadurch vereinfacht, dass \mathbf{BG} nur ein Objekt enthält, womit natürliche Transformationen nur aus einem Morphismus bestehen. Da sowohl in der Quillen- und Strom-Modellstruktur die Faserungen in der Definition angegeben werden, bietet sich die Betrachtung der projektiven gegenüber der injektiven Modellstrukturen an, wobei:

- Die schwachen Äquivalenzen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{proj}}$ (und ebenso $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{inj}}$) sind die G -equivarianten schwachen Homotopieäquivalenzen. Die Faserungen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{proj}}$ sind die G -equivarianten Serre-Faserungen.
- Die schwachen Äquivalenzen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{proj}}$ (und ebenso $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{inj}}$) sind die G -equivarianten Homotopieäquivalenzen. Die Faserungen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{proj}}$ sind die G -equivarianten Hurewicz-Faserungen.
- Die schwachen Äquivalenzen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{mix}})_{\text{proj}}$ (und ebenso $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{mix}})_{\text{inj}}$) sind die G -equivarianten schwachen Homotopieäquivalenzen. Die Faserungen von $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{mix}})_{\text{proj}}$ sind die G -equivarianten Hurewicz-Faserungen.

In keiner der vier Modellstrukturen (sofern existent) werden daher (schwache) G -Homotopieäquivalenzen als schwache Äquivalenzen benutzt.

106.1. FEINE MODELLSTRUKTUR AUF $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$

Definition 106.1 (Feine Quillen-Modellstruktur). *Für eine topologische Gruppe G ist (sofern existent) die Modellstruktur auf $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$, deren schwache Äquivalenzen die schwachen G -Homotopieäquivalenzen und deren Faserungen die G -Serre-Faserungen sind, die feine Quillen-Modellstruktur, notiert als $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{fein}}$.*

Definition 106.2 (Feine Strom-Modellstruktur). *Für eine topologische Gruppe G ist (sofern existent) die Modellstruktur auf $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$, deren schwache Äquivalenzen die G -Homotopieäquivalenzen und deren Faserungen die G -Hurewicz-Faserungen sind, die feine Strom-Modellstruktur, notiert als $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{fein}}$.*

Lemma 106.3. *Für eine topologische Gruppe G ist jeder G -CW-Komplex ein kofaserndes Objekt in $\mathbf{Top}_{G,\text{fein}}$.*

Beweis. XXXX \square

106.2. BOREL-MODELLSTRUKTUR AUF $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$

Definition 106.4 (Borel-Modellstruktur). XXXX

Die Kategorie \mathbf{Top}_G mit der Borel-Modellstruktur wird als $\mathbf{Top}_{G,\text{Borel}}$ notiert.

107. MODELLSTRUKTUREN AUF $\mathbf{Act}_G\mathbf{sSet}$ 107.1. FEINE MODELLSTRUKTUR AUF $\mathbf{Act}_G\mathbf{sSet}$

Definition 107.1 (Feine Kan–Quillen-Modellstruktur). Für eine simpliziale Gruppe G ist (sofern existent) die Modellstruktur auf $\mathbf{Act}_G\mathbf{sSet}$, deren schwache Äquivalenzen XXXX und deren Faserungen XXXX sind, die feine Kan–Quillen-Modellstruktur, notiert als $\mathbf{Act}_G(\mathbf{sSet}_{\text{KQ}})_{\text{fein}}$.

Definition 107.2 (Feine Joyal-Modellstruktur). Für eine simpliziale Gruppe G ist (sofern existent) die Modellstruktur auf $\mathbf{Act}_G\mathbf{sSet}$, deren schwache Äquivalenzen XXXX und deren Faserungen XXXX sind, die feine Joyal-Modellstruktur, notiert als $\mathbf{Act}_G(\mathbf{sSet}_{\text{J}})_{\text{fein}}$.

108. EQUIVARIANTES HOPF-THEOREM

Das equivariante Hopf-Theorem verallgemeinert das Hopf-Theorem aus der Homotopietheorie auf die equivariante Homotopietheorie.

Theorem 108.1 (Equivariantes Hopf-Theorem). XXXX

Beweis. XXXX □

Es können daher (sofern existent) vier verschiedene Modellstrukturen auf $\mathbf{Act}_G\mathbf{Top}$, nämlich die injektive und projektive Modellstruktur der Quillen- und Strom-Modellstruktur, jeweils notiert als $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{inj}}$, $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{Qu}})_{\text{proj}}$, $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{inj}}$ und $\mathbf{Act}_G(\mathbf{Top}_{\text{St}})_{\text{proj}}$.

•

Bekanntes über sich selbst angereicherte Kategorien sind die Kategorie \mathbf{Mon} der Monoide, in welchen in Gruppenobjekt eine abelsche Gruppe ist, die Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der \mathbb{K} -Vektorräume für einen Körper \mathbb{K} , in welchen ein Gruppenobjekt XXXX, der Kategorie \mathbf{Top} der topologischen Räume, in welchen ein Gruppenobjekt eine topologische Gruppe ist, und die Kategorie \mathbf{sSet} der simplizialen Mengen, in welchen ein

- \mathbf{Mon} der Monoide, in welchen in Gruppenobjekt eine abelsche Gruppe ist
- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der \mathbb{K} -Vektorräume für einen Körper \mathbb{K} , in welchen ein Gruppenobjekt XXXX
- \mathbf{sSet} der simplizialen Mengen, in welchen ein Gruppenobjekt eine simpliziale Gruppe ist

Für eine abelsche Gruppe G ist die Kategorie $\mathbf{Act}_G\mathbf{Mon}$ XXXX

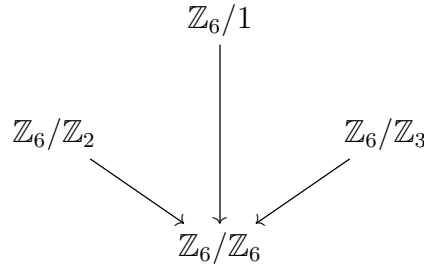
109. EQUIVARIANTES PONTRJAGIN-THEOREM

Das equivariante Pontrjagin-Theorem verallgemeinert das Pontrjagin-Theorem aus der Homotopie- und Kobordismustheorie auf die equivariante Homotopie- und equivariante Kobordismustheorie.

Theorem 109.1 (Equivariantes Pontrjagin-Theorem). XXXX

Beweis. XXXX □

110. ELMENDORF-THEOREM



Theorem 110.1 (Elmendorf-Theorem). *Für eine topologische Gruppe G gibt es eine Äquivalenz von $(\infty, 1)$ -Kategorien:*

(685) $\mathbf{Top}_G[\mathrm{whe}_G^{-1}] \simeq \mathbf{PSh}_\infty(\mathbf{Orb}_G).$

Beweis. XXXX □

(686) $\mathbf{PSh}_\infty(\mathbf{Orb})_{/BG} \simeq \mathbf{PSh}_\infty(\mathbf{Orb}_{/BG}) \simeq \mathbf{PSh}_\infty(\mathbf{Orb}_G) \simeq \mathbf{Top}_G[\mathrm{whe}_G^{-1}]$

Lemma 110.2. *Für einen $(\infty, 1)$ -Topos \mathbf{H} und ein Objekt $X \in \mathbf{H}$ ist die $(\infty, 1)$ -Scheibenkategorie \mathbf{H}/X ein $(\infty, 1)$ -Topos, genannt der $(\infty, 1)$ -Scheibentopos.*

Beweis. XXXX □

Lemma 110.3. *Für einen lokal ∞ -zusammenhängenden $(\infty, 1)$ -Topos \mathbf{H} ist für jedes Objekt $X \in \mathbf{H}$ der $(\infty, 1)$ -Scheibentopos \mathbf{H}/X ebenfalls lokal ∞ -zusammenhängend.*

Beweis. XXXX □

Einen stetiger Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow G'$ zwischen topologischen Gruppen G induziert einen Funktor zwischen ihren Orbitkategorien:

(687) $\mathbf{Orb}_G \rightarrow \mathbf{Orb}_{G'}, G/H \mapsto G'/f(H)$

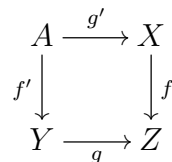
(688) $\Phi: [\mathcal{C}, \mathbf{BG}] \rightarrow [\mathbf{Orb}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}], \Phi(X): G/H \rightarrow X^H$

(689) $\Psi: [\mathbf{Orb}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathbf{BG}], \Psi(Y) = Y(G/1)$

TEIL 9. ANHANG

111. NACHTRÄGE

Lemma 111.1. *Ein kommutatives Quadrat:*



ist genau dann h-kartesisch, wenn $\forall y \in Y: \mathrm{Hofib}_y(f') \cong \mathrm{Hofib}_{g(y)}(f)$.

Beweis.

(690) $\mathrm{Hofib}_{(z,\gamma)}(\mathrm{Hofib}_y(g') \rightarrow \mathrm{Hofib}_{f(y)}(g)) \cong \mathrm{Hofib}_{(y,\gamma,z)}(A \rightarrow X \times_Z^h Y)$

□

Korollar 111.2. *Ein kartesisches Quadrat:*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

mit einer Faserung f ist h -kartesisch.

112. SPEKTREN

Definition 112.1 (Spektrum). *Eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktierter topologischer Räume mit punktierten stetigen Abbildungen $\sigma_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ ist ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$.*

Die Abbildung $\sigma_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ entspricht unter der Adjunktion $\Sigma \dashv \Omega$ eindeutig bis auf Homotopie einer stetigen Abbildung $\tilde{\sigma}_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$. Ein Spektrum, für das all diese Abbildungen jeweils schwache Homotopieäquivalenzen sind, ist ein Ω -Spektrum. Für einen punktierten topologischen Raum X ist $X_n = \Sigma^n X$ mit den Identitätsabbildungen $\sigma_n = \text{id}_{\Sigma^{n+1} X}: \Sigma X_n = \Sigma \Sigma^n X \rightarrow \Sigma^{n+1} X = X_{n+1}$ ein spezielles Ω -Spektrum, welches *Einhängungsspektrum* von X genannt wird und als $\Sigma^\infty X$ notiert wird.

Definition 112.2 (Sphärenspektrum). *Das Einhängungsspektrum der nulldimensionalen Sphäre:*

(691)
$$\mathbf{S} := \Sigma^\infty S^0$$

ist das Sphärenspektrum.

Für eine Gruppe G ist $HG_n = K(G, n)$ mit den durch XXXX gegebenen Homotopieäquivalenzen $\sigma_n: \Sigma K(G, n) \rightarrow K(G, n+1)$ das *Eilenberg–MacLane-Spektrum* HG . Für ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ ist $\Sigma^k E$ mit $(\Sigma^k E)_n = E_{n+k}$ das *verschobene Spektrum*.

Für einen punktierten topologischen Raum X wird dessen verschobenes Einhängungsspektrum kurz als:

(692)
$$\Sigma^{\infty+k} X := \Sigma^k \Sigma^\infty X$$

Definition 112.3 (Spektrnmorphismus). *Für Spektren $(E_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(F_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Familie $(f_n: E_n \rightarrow F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger punktierter Abbildungen, für die:*

(693)
$$f_{n+1} \circ \rho_n = \sigma_n \circ \Sigma f_n,$$

also für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\rho_n} & E_{n+1} \\ \Sigma f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_n & \xrightarrow{\sigma_n} & F_{n+1} \end{array}$$

ein Spektrnmorphismus.

Eine punktierte stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen punktierten topologischen Räumen X und Y induziert einen Spektrnmorphismus $\Sigma^\infty f: \Sigma^\infty X \rightarrow \Sigma^\infty Y$ zwischen ihren Einhängungsspektren durch:

(694)
$$(\Sigma^\infty f)_n = \Sigma^n f.$$

Korollar 112.4. *Das Einhängungsspektrum ist ein kovarianter Funktor:*

(695)
$$\Sigma^\infty: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Spectra}_*.$$

Lemma 112.5 (Smash-Produkt für Spektren). *Für ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ und einen punktierten topologischen Raum X ist:*

$$(696) \quad E \wedge X := (E_n \wedge X, \sigma_n \wedge \text{id})_{n \in \mathbb{N}}$$

mit der Identifikation $\Sigma(E_n \wedge X) \cong \Sigma E_n \wedge X$ nach XXXX ebenfalls ein Spektrum.

Beweis. XXXX □

Lemma 112.6. *Für einen punktierten topologischen Raum X ist dessen Einhängungsspektrum genau dessen Smash-Produkt mit dem Sphärenspektrum:*

$$(697) \quad \Sigma^\infty X = \mathbf{S} \wedge X$$

Beweis.

$$(698) \quad (\mathbf{S} \wedge X)_n = \mathbf{S}_n \wedge X = S^n \wedge X = \Sigma^n X$$

□

Lemma 112.7 (Wedge-Summe von Spektren). *Für Spektren $E = (E_n, \rho_n)$ und $F = (F_n, \sigma_n)$ ist:*

$$(699) \quad E \vee F := (E_n \vee F_n, S^1 \wedge (E_n \vee F_n) \rightarrow (S^1 \vee E_n) \times (S^1 \vee F_n) \xrightarrow{\rho_n \vee \sigma_n} E_{n+1} \times F_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

ebenfalls ein Spektrum.

Beweis. XXXX □

Lemma 112.8 (Produkt von Spektren). *Für Spektren $E = (E_n, \rho_n)$ und $F = (F_n, \sigma_n)$ ist:*

$$(700) \quad E \times F := (E_n \times F_n, S^1 \wedge (E_n \times F_n) \rightarrow (S^1 \wedge E_n) \times (S^1 \wedge F_n) \xrightarrow{\rho_n \times \sigma_n} E_{n+1} \times F_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

ebenfalls ein Spektrum.

Beweis. XXXX □

$$(701) \quad \begin{aligned} (\Sigma^\infty X \wedge Y)_n &= (\Sigma^\infty X)_n \wedge Y = \Sigma^n X \wedge Y^n \wedge X \wedge Y \\ &\cong X \wedge \Sigma^n Y = X \wedge (\Sigma^\infty Y)_n = (X \wedge \Sigma^\infty Y)_n \end{aligned}$$

Mit Lemma (11.6):

$$(702) \quad \Sigma \text{Cone}(f)_n = \Sigma \text{Cone}(f_n) \xrightarrow{\text{he}} \text{Cone}(\Sigma f_n) \rightarrow \text{Cone}(f_{n+1}) = \text{Cone}(f)_{n+1}$$

$$(703) \quad \pi_k(E_n) = [\mathcal{S}^k, E_n] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma \mathcal{S}^k, \Sigma E_n] \xrightarrow{-\circ \sigma_n} [S^{k+1}, E_{n+1}] = \pi_{k+1}(E_{n+1})$$

Definition 112.9. *Für ein Spektrum (E_n, σ_n) ist:*

$$(704) \quad \pi_k(E) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} E_n$$

dessen k -te Homotopiegruppe.

Für die Homotopiegruppen eines verschobenen Spektrums gilt:

$$(705) \quad \pi_{k+l}(\Sigma^l E) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k+l}(\Sigma^l E)_n = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k+l} E_{n+l} = \pi_k(E)$$

Für die Homotopiegruppen des Eilenberg–MacLane-Spektrums folgt:

$$(706) \quad \pi_k(HG) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} HG_n = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} K(G, n) = \begin{cases} G & ; k = 0 \\ 1 & ; k > 0 \end{cases} .$$

Mit Gleichung (XXXX) folgt direkt:

Korollar 112.10. Für ein Ω -Spektrum (E_n, σ_n) ist:

$$(707) \quad \pi_k(E) = \pi_k(E_0).$$

Definition 112.11 (Stabile Homotopiegruppe). Für einen punktierten topologischen Raum X ist:

$$(708) \quad \pi_k^{\text{stab}}(X) = \pi_k(\Sigma^\infty X) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} \Sigma^n X$$

dessen stabile Homotopiegruppe.

Offenbar ist die k -te stabile Homotopiegruppe der 0-Sphäre die k -te Homotopiegruppe des Sphärenspektrums, also $\pi_k^{\text{stab}}(\xi^0) = \pi_k(\mathbf{S})$. Für die k -ten stabilen Homotopiegruppen höherdimensionaler Sphären ist:

$$(709) \quad \begin{aligned} \pi_k^{\text{stab}}(\xi^m) &= \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} \Sigma^n \xi^m = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k} S^{n+m} \\ &= \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k-m} S^n = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k-m} \Sigma^n \xi^0 = \pi_{k-m}^{\text{stab}}(\xi^0) \end{aligned}$$

112.1. INDUZIERTE HOMOLOGIETHEORIEN

Satz 112.12. Ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ induziert eine reduzierte Homologietheorie durch: [?, Thm. 4F.2.]

$$(710) \quad \tilde{E}_n(X) := \pi_n(E \wedge X) = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(E_k \wedge X)$$

Beweis. XXXX □

Es folgt:

$$(711) \quad \tilde{E}_n(\xi^0) = \pi_n(E).$$

Für die von einem Einhängungsspektrum $\Sigma^\infty Y$ eines topologischen Raumes Y induzierte reduzierte Homologietheorie gilt:

$$(712) \quad \widetilde{\Sigma^\infty Y}_n(X) = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}((\Sigma^\infty Y)_k \wedge X) = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(\Sigma^k Y \wedge X)$$

Für die von Eilenberg–MacLane-Spektrum HG einer Gruppe G induzierte reduzierte Homologietheorie gilt:

$$(713) \quad \widetilde{HG}_n(X) = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}((HG)_k \wedge X) = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(K(G, k) \wedge X)$$

112.2. INDUZIERTE KOHOMOLOGIETHEORIEN

Satz 112.13. Ein Ω -Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ induziert eine reduzierte Kohomologietheorie auf CW_* durch: [?, Thm. 4.58.]

$$(714) \quad \tilde{E}^n(X) := [X, E_n].$$

Beweis. XXXX □

Satz 112.14. Ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ induziert eine Kohomologietheorie durch:

$$(715) \quad \tilde{E}^n(X) := \text{colim}_{k \rightarrow \infty} [\Sigma^k X, E_{n+k}] \cong \text{colim}_{k \rightarrow \infty} [X, \Omega^k E_{n+k}]$$

Für ein Ω -Spektrum führt dieser Ausdruck wegen $\Omega^k E_{n+k} \cong E_n$ auf Satz (??) zurück.

Beweis. XXXX □

Es folgt:

$$(716) \quad \widetilde{E}^{-n}(\xi^0) = \pi_n(E).$$

Für die von einem Einhängungsspektrum induzierte Homologietheorie gilt:

$$(717) \quad \widetilde{\Sigma^\infty X}^n(Y) = \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} [\Sigma^k Y, \Sigma^{n+k} X] = ?$$

Die vom Eilenberg–MacLane-Spektrum einer Gruppe G induzierte Kohomologietheorie ist genau die singuläre Kohomologie mit Einträgen in G :

$$(718) \quad \begin{aligned} \widetilde{HG}^n(X) &= \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} [X, \Omega^k K(G, n+k)] \\ &= \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} [X, K(G, n)] = [X, K(G, n)] = H_{\text{sing}}^n(X; G). \end{aligned}$$

Satz 112.15. *Jede reduzierte verallgemeinerte Kohomologietheorie auf \mathbf{CW}_* lässt sich durch ein Ω -Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ gemäß Satz (??) darstellen. [?, Thrm. 4E.1.]*

Beweis. XXXX □

112.3. UNENDLICHER SCHLEIFENRAUM

Definition 112.16 (Unendlicher Schleifenraum). *Für ein Spektrum $E = (E_n, \sigma_n)$ ist der von den Abbildungen $\Omega^n \tilde{\sigma}_n: \Omega^n E_n \rightarrow \Omega^{n+1} E_{n+1}$ erzeugte Kolimes:*

$$(719) \quad \Omega^\infty E := \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \Omega^k E_k$$

dessen unendlicher Schleifenraum.

Beispiel 112.17. *Für den unendlichen Schleifenraum des Eilenberg–MacLane-Spektrum HG einer abelschen Gruppe G gilt mit Korollar (??):*

$$(720) \quad \Omega^\infty HG = \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \Omega^k (HG)_k = \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \Omega^k K(G, k) \stackrel{\text{whe}}{\cong} \Omega K(G, 1).$$

Ein Spektrenmorphismus $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}: E \rightarrow F$ zwischen Spektren $E = (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $F = (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induziert eine stetige Abbildung zwischen ihren unendlichen Schleifenräumen durch:

$$(721) \quad \Omega^\infty f := \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \Omega^k f_k.$$

Korollar 112.18. *Der unendliche Schleifenraum ist ein kovarianter Funktor:*

$$(722) \quad \Omega^\infty: \mathbf{Spectra}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*.$$

112.4. ADJUNKTION ZWISCHEN EINHÄNGUNGSSPEKTRUM UND UNENDLICHEM SCHLEIFENRAUM

Ein wichtiger Spezialfall von Spektrenmorphisimen ist der von einem Einhängungsspektrum in ein beliebiges Spektrum, da dann sämtliche stetige Abbildungen von diesem bereits durch die erste festgelegt werden. Sei X ein topologischer Raum, $E = (E_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Spektrum und $f: \Sigma^\infty X \rightarrow E$ ein Spektrenmorphismus. Für dessen einzelne Abbildungen gelten die Relationen:

$$(723) \quad f_{n+1} = \sigma_n \circ \Sigma f_n: \Sigma^{n+1} X \rightarrow E_{n+1},$$

weshalb der komplette Spektrenmorphismus bereits durch die stetige Abbildung $f_0: X \rightarrow E_0$ festgelegt wird.

113. LERAY–SERRE-SPEKTRALSEQUENZ

113.1. WANG-SEQUENZ

Die Wang-Sequenz ist eine spezielle Anwendung der Leray–Serre-Spektralsequenz auf Faserbündel über Sphären.

114. CALABI–YAU-MANNIGFALTIGKEIT

Insbesondere in der Stringtheorie werden sechsdimensionale Calabi–Yau-Mannigfaltigkeiten verwendet.

Definition 114.1 (Calabi–Yau-Mannigfaltigkeit). *Eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chern-Klasse ist eine Calabi–Yau-Mannigfaltigkeit.*

Satz 114.2. *Eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist genau dann Calabi–Yau, wenn ihre Holonomiegruppe $SU(n)$ ist.*

Beweis. □

115. J-HOMOMORPHISMUS

Es gibt zwei verschiedene Definitionen für den J-Homomorphismus, welche bis auf Homotopie gleich sind. Eine nutzt die Hopf-Konstruktion und die andere benutzt die Alexandroff- oder Einpunkt-Kompaktifizierung.

Lemma 115.1. *Für eine orthogonale Abbildung $O: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist:*

$$(724) \quad O^* \simeq \Sigma(O|_{S^{k-1}}) : S^k \rightarrow S^k.$$

Beweis. XXXX

$$(725) \quad \deg(\Sigma(O|_{S^{k-1}})) = \deg(O|_{S^{k-1}}) = \deg(O^*|_{S^{k-1}}) = \text{????}.$$

□

Lemma 115.2. *Für eine unitäre Abbildung $U: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ ist:*

$$(726) \quad U^* \simeq \Sigma(U|_{S^{2k-1}}) : S^{2k} \rightarrow S^{2k}.$$

Beweis. XXXX □

115.1. ERSTE DEFINITION

$$(727) \quad \begin{aligned} J_{n,k}^O : \pi_n O(k) = [S^n, O(k)] &\rightarrow [S^n, \text{Aut}(S^{k-1})] \rightarrow [S^n \times S^{k-1}, S^{k-1}] \\ &\xrightarrow{H} [S^n * S^{k-1}, \Sigma S^{k-1}] = [S^{n+k}, S^k] = \pi_{n+k}(S^k) \end{aligned}$$

Definition 115.3 (J-Homomorphismus). XXXX

$$(728) \quad J_{n,k}^O : \pi_n O(k) \rightarrow \pi_{n+k}(S^k), [f] \mapsto H([(x, y) \mapsto f(x)(y)]) \text{ mit } x \in S^n, y \in S^{k-1}$$

Lemma 115.4. *Der J-Homomorphismus ist tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. XXXX □

115.2. ZWEITE DEFINITION

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+k} & \longrightarrow & S^n \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{(x,y) \mapsto f(x)(y)} \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{n+k} & \longrightarrow & S^k \end{array}$$

Definition 115.5 (J-Homomorphismus). XXXX

$$(729) \quad J_{n,k}^O : \pi_n O(k) \rightarrow \pi_{n+k} S^k, [f] \mapsto [(\text{ev} \circ ((f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))^*]$$

Lemma 115.6. *Der J-Homomorphismus ist tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. XXXX

$$\begin{aligned} J_{n,k}^O([f] + [g]) &= J_{n,k}^O([(f \vee g) \circ p_n]) = [(\text{ev} \circ (((f \vee g) \circ p_n \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))^*] = \text{????} \\ (730) \quad &= [(\text{ev} \circ ((f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))^*] + [(\text{ev} \circ ((g \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))^*] = J_{n,k}^O([f]) + J_{n,k}^O([g]) \end{aligned}$$

□

Lemma 115.7.

$$(731) \quad \begin{array}{ccc} J_{n,k+1}^O \circ (i_n^O)_* & = & \Sigma \circ J_{n,k}^O \\ \pi_n O(k) \xrightarrow{(i_n^O)_*} \pi_n O(k+1) & & \\ J_{n,k}^O \downarrow & & \downarrow J_{n,k+1}^O \\ \pi_{n+k} S^k \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1} S^{k+1} & & \end{array}$$

Beweis. (Mit der ersten Definition) XXXX

$$(\Sigma \circ J_{n,k}^O)([f]) = \Sigma H([(x, y) \mapsto f(x)(y)]) = \text{????} = H([(x, y, t) \mapsto (f(x)(y), t)]) = H([(x, y, t) \mapsto (i_n^O \circ f(x)(y), t)])$$

□

Beweis. (Mit der zweiten Definition) XXXX

$$\begin{aligned} (\Sigma \circ J_{n,k}^O)([f]) &= [\Sigma (\text{ev} \circ ((f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))^*] = [((\text{ev} \circ ((f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^k})) \times \text{id}_{\mathbb{R}})^*] \\ &= [((\text{ev} \times \text{id}_{\mathbb{R}}) \circ ((f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^{k+1}}))^*] = [(\text{ev} \circ ((i_n^O \circ f \circ c_n) \times \text{id}_{\mathbb{R}^{k+1}}))^*] \\ (732) \quad &= (J_{n,k+1}^O \circ (i_n^O)_*)([f]) \end{aligned}$$

□

Nach diesem Lemma lässt sich der Kolimes des (speziellen) orthogonalen J-Homomorphismus bilden:

$$(733) \quad J_n^O := \text{colim}_{k \in \mathbb{N}} J_{n,k}^O : \pi_n O(\infty) \rightarrow \pi_n^{\text{stab}}$$

$$(734) \quad J_n^{\text{SO}} := \text{colim}_{k \in \mathbb{N}} J_{n,k}^{\text{SO}} : \pi_n \text{SO}(\infty) \rightarrow \pi_n^{\text{stab}}$$

Lemma 115.8.

$$(735) \quad J_{n,k+1}^U \circ (i_n^U)_* = \Sigma^2 \circ J_{n,k}^U$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_n U(k) & \xrightarrow{(i_n^U)^*} & \pi_n U(k+1) \\ J_{n,k}^U \downarrow & & \downarrow J_{n,k+1}^U \\ \pi_{n+2k} S^{2k} & \xrightarrow{\Sigma^2} & \pi_{n+2(k+1)} S^{2(k+1)} \end{array}$$

Beweis. XXXX □

Nach diesem Lemma lässt sich der Kolimes des (speziellen) unitären J-Homomorphismus bilden:

$$(736) \quad J_n^U := \operatorname{colim}_{k \in \mathbb{N}} J_{n,k}^U : \pi_n U(\infty) \rightarrow \pi_n^{\text{stab}}$$

$$(737) \quad J_n^{\text{SU}} := \operatorname{colim}_{k \in \mathbb{N}} J_{n,k}^{\text{SU}} : \pi_n \text{SU}(\infty) \rightarrow \pi_n^{\text{stab}}$$

116. BROUWERSCHER FIXPUNKTSATZ

Beweis. \Rightarrow : Angenommen, $r : \mathcal{D}^{n-1}$ ist eine stetige Retraktion, dann ist:

$$(738) \quad \mathcal{D}^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \xrightarrow{x \mapsto -x} S^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$$

stetig ohne Fixpunkt.

\Leftarrow : Angenommen $f : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$ ist stetig ohne Fixpunkt, dann ist:

$$(739) \quad r(x) = x + \lambda(f(x) - x)$$

eine stetige Retraktion. □

Für $n = 0$ ist der Brouwersche Fixpunktsatz trivial, für $n = 1$ ist es der Zwischenwertsatz.

$$(740) \quad p_1 : S^{111}$$

$$(741) \quad p_n : S^1 \wedge S^{n-1} \xrightarrow{p_1 \wedge \text{id}} (S^{11}) \wedge S^{n-1} \cong (S^1 \wedge S^{n-1}) \vee (S^1 \wedge S^{n-1}) = S^{nn}$$

$$(742) \quad \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), ([\alpha], [\beta]) \mapsto [(\alpha, \beta) \circ p_n]$$

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{p_n} & S^n \vee S^n \\ p_n \downarrow & & \downarrow p_n \vee \text{id} \\ S^n \vee S^n & \xrightarrow{\text{id} \vee p_n} & S^n \vee S^n \vee S^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{p_n} & S^n \vee S^n \\ p_n \downarrow & \dashrightarrow \text{id} & \downarrow \text{const, id} \\ S^n \vee S^n & \xrightarrow{\text{id, const}} & S^n \end{array}$$

Lemma 116.1. *Es gibt höchstens $2^{v_2(n+1)} - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf S^n . [?, Thm. 1.1.]*

Lemma 116.2. *Es gibt höchstes $2^{v_2(n+1)-1}$ linear unabhängige Vektorfelder auf S^n , wenn $v_2(n+1) \geq 4$. [?]*

Die kleinste natürliche Zahl n mit $v_2(n+1) \geq 4$ ist $n = 15$, in diesem Fall besagt das Lemma, dass es auf S^{15} maximal acht linear unabhängige Vektorfelder gibt.

TEIL 10. NOTIZEN

117. STANDARD-SIMPLIZES

$$(743) \quad [v_0, \dots, v_n]: \Delta^n \rightarrow V, \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$$

$$(744) \quad d_i^n = [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$$

Insbesondere ist:

$$(745) \quad d_0^1 = [e_1]: \Delta^0 \rightarrow \Delta^1, e_0 \mapsto e_1$$

$$(746) \quad d_1^1 = [e_0]: \Delta^0 \rightarrow \Delta^1, e_0 \mapsto e_0$$

Allgemein ist $d_n^n: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ die kanonische Einbettung.

Lemma 117.1.

$$(747) \quad d_i^{n+1} \circ d_j^n = d_{j+1}^{n+1} \circ d_i^n: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n+1}, i < j$$

$$(748) \quad d_{i+1}^{n+1} \circ d_i^n = 0: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n+1}$$

$$(749) \quad d_{i+1}^{n+1} d_i^n \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i$$

118. HOMÖOTOPIEGRUPPEN

Satz 118.1. *Für einen lokalkompakten und lokal zusammenhängenden Hausdorff-Raum X ist $\text{Homeo}(X)$ eine topologische Gruppe.*

Beweis. XXXX □

Definition 118.2 (Homöotopiegruppe). *Für einen lokalkompakten und lokal zusammenhängenden Hausdorff-Raum X ist:*

$$(750) \quad \text{HME}_k(X) := \pi_k \text{Homeo}(X)$$

dessen k -te Homöotopiegruppe.

Definition 118.3 (Kohomöotopiegruppe). *Für einen lokalkompakten und lokal zusammenhängenden Hausdorff-Raum X ist:*

$$(751) \quad \text{HME}^k(X) := \pi^k \text{Homeo}(X)$$

dessen k -te Kohomöotopiegruppe.

119. ZELLULÄRE HOMOLOGIE

Definition 119.1 (Zellulärer Kettenkomplex). XXXX

$$(752) \quad C_n^{\text{cell}}(X, A) := H_n(X_n, X_{n+1})$$

Definition 119.2 (Zelluläre Homologie). XXXX

$$(753) \quad H_*^{\text{cell}}(X, A) := H_*(C_\bullet^{\text{cell}}(X, A), \partial_\bullet)$$

Lemma 119.3. *Die singuläre und zelluläre Homologie sind isomorph.*

Beweis. XXXX □

120. ZELLULÄRE KOHOMOLOGIE

Definition 120.1 (Zellulärer Kettenkomplex). XXXX

$$(754) \quad C_{\text{cell}}^n(X, A) := H^n(X_n, X_{n+1})$$

Definition 120.2 (Zelluläre Homologie). XXXX

$$(755) \quad H_{\text{cell}}^*(X, A) := H^*(C_{\text{cell}}^\bullet(X, A), \partial^\bullet)$$

Lemma 120.3. *Die singuläre und zelluläre Kohomologie sind isomorph.*

Beweis. XXXX □

121. TOR-FUNKTOR

Für eine kurze exakte Sequenz von R -Linksmoduln:

$$(756) \quad 0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0$$

ist für ein R -Rechtsmodul A die Sequenz von abelschen Gruppen:

$$(757) \quad A \otimes_R X \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \alpha} A \otimes_R Y \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \beta} A \otimes_R Z \rightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

Lemma 121.1. *Das Tensorprodukt ist linksexakt.*

Beweis. Sei R ein Ring und A, B und C jeweils R -Linksmoduln sowie $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ exakt. □

Definition 121.2. *Die n -te Linksableitung des Tensorprodukts:*

$$(758) \quad \text{Tor}_n^R(X, Y) := L_n(- \otimes_R Y)(X) \cong L_n(X \otimes_R -)(Y)$$

ist der Tor-Funktor.

122. EXT-FUNKTOR

Lemma 122.1. *Der Hom-Funktor ist rechtsexakt.*

Beweis. Sei R ein Ring und A, B und C jeweils R -Linksmoduln sowie $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ exakt. □

Definition 122.2 (Extensionsgruppe). *Die n -te Rechtsableitung des Hom-Funktors:*

$$(759) \quad \text{Ext}^n(X, Y) := R_n \text{Hom}(-, Y)(X) \cong R_n \text{Hom}(X, -)(Y)$$

ist der Ext-Funktor.

123. GRUPPENHOMOLOGIE

Der Funktor:

$$(760) \quad \rightarrow \mathbf{AbGrp}, A \mapsto A_G := A \rtimes_{\mathbb{Z}} G$$

Alternativ lässt sich die Gruppenhomologie auch mit dem Tor-Funktor definieren:

$$(761) \quad H_n(G, A) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$$

124. GRUPPENKOHOMOLOGIE

Alternativ lässt sich die Gruppenkohomologie auch mit dem Ext-Funktor definieren:

$$(762) \quad H^n(G, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$$

125. QUANTENKOHOMOLOGIE

Definition 125.1 (Kleine Quantenkohomologie). *Für eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit X ist:*

$$(763) \quad *(X, R) := (H^*(X, \mathbb{Z}) / \text{Tor } H^*(X, \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

ihre kleine Quantenkohomologie.

126. FUNDAMENTALGRUPPOID

Definition 126.1 (Fundamentalgruppoid).

127. TOPOLOGISCHE GRUPPE

Definition 127.1 (Topologische Gruppe). *Eine Gruppe X , die mit einer Topologie versehen ist, sodass:*

I.) *Die Gruppenverknüpfung $\circ: X \times X \rightarrow X$ bezüglich der Produkttopologie stetig ist.*

II.) *Die Inversenbildung $\cdot^{-1}: X \rightarrow X$ stetig ist*

ist eine topologische Gruppe.

128. KOMPAKTE UND LOKALKOMPAKTE GRUPPEN

Definition 128.1 (Lokalkompakte Gruppe).

Jede Gruppe G wird mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(G)$ zu einer lokalkompakten Gruppe.

129. NOETHERSCHE RÄUME

Definition 129.1 (Noetherscher Raum). *Ein topologischer Raum, in dem jede aufsteigende Kette von offenen Mengen $U_0 \subset U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$ stationär wird, also:*

$$(764) \quad \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n: U_m = U_n$$

wird noethersch genannt.

Lemma 129.2. *Unterräume von noetherschen Räumen sind noethersch.*

Beweis.

□

Lemma 129.3. *Noethersche Räume sind quasi-kompakt.*

Beweis.

□

130. SPEKTRUM EINES RINGS (TOPOLOGISCH)

Satz 130.1 (Zariski-Topologie). *Für einen Ring R ist: eine Topologie, die Zariski-Topologie auf seinem Spektrum $\text{Sec}(R)$.*

Beweis.

□

Lemma 130.2. *Das Spektrum eines Ringes ist quasikompakt.*

Beweis.

□

Lemma 130.3. *Das Spektrum eines noetherschen Rings ist noethersch.*

Beweis.

□

131. ∞ -SPHÄRE

(765)
$$S^\infty := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} S^n$$

(766)
$$\pi_k S^\infty = \pi_k \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} S^n = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \pi_k S^n = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \pi_k S^{n+k+1} = 1$$

LITERATUR

- [1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*
- [2] Wolfgang Lück, *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*
- [3] Alexander Arhangel'skii, Mikhail Tkachenko. *Topological Groups and Related Structures* (2008). Atlantis Press
- [4] J.F. Adams. *On the non-existence of elements of Hopf invariant one.*
- [5] J.F. Adams. *Vector fields on spheres.* Volume 1, Issue 1, January–March 1962, Pages 63–65
- [6] N.E. Steenrod und J.H.C. Whitehead. *Vector fields on the n -spheres.*
- [7] I.M. James. *Whitehead products and vector-fields on spheres.*
- [8] Michael Farber, *Topological complexity of motion planning* (2001), <https://arxiv.org/abs/math/0111197>
- [9] Armindo Costa. *Topological Complexity of Configuration Spaces* (2010). Ph.D. Thesis. Durham University. http://etheses.dur.ac.uk/736/1/thesis_ArmindoCosta.pdf?DDD21+
- [10] Alexander Dranishnikov, Rustam Sadykov. *On LS-category and topological complexity of connected sum* (2017). arxiv.org/abs/1707.07088
- [11] Daniel C. Cohen, Lucile Vandembroucq. *Motion planning in connected sums of real projective spaces* (2018). arxiv.org/abs/1807.09947
- [12] Michael Farber, Serge Tabachnikov, Sergey Yuzvinsky. *Topological robotics: motion planning in projective spaces* (2002). arxiv.org/abs/math/0210018
- [13] Daniel C. Cohen, Lucile Vandembroucq. *Motion planning in connected sums of real projective spaces* (2018). arxiv.org/abs/1612.03133
- [14] Tetsu Nishimoto. *On the Lusternik–Schnirelmann category of Stiefel manifolds* (2007). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864107000867>
- [15] Singhof, W. *On the Lusternik–Schnirelmann category of Lie groups.* Math Z 145, 111–116 (1975). <https://doi.org/10.1007/BF01214775>
- [16] Singhof, W. *On the Lusternik–Schnirelmann category of Lie groups: II.* Math Z 151, 143–148 (1976). <https://doi.org/10.1007/BF01213991>
- [17] Mamoru Mimura, Kei Sugata. *On the Lusternik–Schnirelmann category of symmetric spaces of classical type.* arxiv.org/abs/0904.0930
- [18] I.M. James. *On category, in the sense of Lusternik–Schnirelmann* (1978). Topology, 17, 331–348. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(78\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0040-9383(78)90002-2)
- [19] Allen Hatcher. *The Classification of 3-Manifolds — A Brief Overview.* <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/3Msurvey.pdf>
- [20] Daniel Ruberman. *Null-homotopic embedded spheres of codimension one.* In: Tight and taut submanifolds (Berkeley, CA, 1994), volume 32 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., pp. 229–232. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [21] D. Barden, *Simply connected five-manifolds.* Ann. of Math. 82 (1965), 365–385.